

1915.

530.5
4593

No. 24.

PL 6
PERIODICAL ROOM
REFINED
1915
ANNALEN
DEPT. OF
LIBRARY
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.
VIERTE FOLGE.

Band 48. Heft 8.

DER GANZEN REIHE 358. BANDES 8. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1915.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.
(Ausgegeben am 1. Februar 1916.)

Inhalt.

	Seite
1. Alfred Coehn u. Josef Franken. Über die Berührungs-elektrizität fester Dielektrika gegen leitende und nichtleitende Flüssigkeiten	1005
2. E. Warburg. Bekanntmachung über die Prüfung von Thermo-metern	1034
3. Georg Krause. Über die Interferenzerscheinungen am Michel-sonschen Interferometer	1037
4. F. Himstedt. Über die absolute elektrooptische Verzögerung und Beschleunigung bei der elektrischen Doppelbrechung	1061
5. W. Wien. Über wahre Absorption der Kanalstrahlen	1089
6. M. v. Smoluchowski. Zur Theorie der Zustandsgleichungen	1098
7. M. v. Smoluchowski. Über Brownsche Molekularbewegung unter Einwirkung äußerer Kräfte und deren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Diffusionsgleichung	1103
8. Martin Knudsen. Das Cosinusgesetz in der kinetischen Gastheorie	1113
9. C. Dieterici. Bemerkungen zu der Arbeit des Hrn. G. Schweikert. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit Namenregister zum Jahrgang 1915	1122 1125

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuziehen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschriften der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 48.

1. *Über die Berührungselektrizität
fester Dielektrika gegen leitende und nichtleitende
Flüssigkeiten;*
von Alfred Coehn und Josef Franken.¹⁾

Als Grundgesetz der Berührungselektrizität für Nichtleiter darf nach zahlreichen — ausnahmslos ihn bestätigenden — Untersuchungen der Satz gelten: Stoffe von höherer Dielektrizitätskonstante laden sich positiv bei der Berührung mit Stoffen von niederer Dielektrizitätskonstante.²⁾

Eine ergiebige Methode zur Prüfung des Satzes bot das Gebiet der Elektrophorese (Elektroosmose). Der Ladungssinn flüssiger Dielektrika gegen feste gibt sich hier in der Richtung zu erkennen, in welcher die beiden Stoffe durch eine elektromotorische Kraft gegeneinander bewegt werden. Läßt man dabei die Flüssigkeit in einer Kapillare der Richtung der Schwere entgegen ansteigen, so resultiert aus der Gegenwirkung von Schwere und konstant gehaltener elektromotorischer Kraft ein als maximale Steighöhe sich kennzeichnender stationärer Zustand. Die Feststellung dieses stationären Zustandes bei einer großen Reihe von Stoffen ergab die quantitative Fassung des Gesetzes: Die Ladung der elektrischen Doppelschichten an den Berührungsflächen dielektrischer Körper ist proportional der Differenz der Dielektrizitätskonstanten der beiden Körper.³⁾

Eine theoretische Deutung dieser zunächst empirischen Gesetzmäßigkeiten gab Lenard auf Grund der von ihm entwickelten Anschauungen über die Struktur der Oberflächenschicht von Flüssigkeiten.⁴⁾ Die Deutung bezog sich in erster Linie auf einen besonderen Fall: auf die Ladungsscheinungen,

1) Vgl. die Dissertation von J. Franken, Göttingen, Juli 1915.

2) A. Coehn, Wied. Ann. 64, p. 217. 1898.

3) A. Coehn und U. Raydt, Ann. d. Phys. 30, p. 777. 1909.

4) P. Lenard, Ann. d. Phys. 47, p. 463. 1915; ausführlicher Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. 1914. Abh. 27. 28. 29.

welche beim Durchperlen von Gasen durch Flüssigkeiten sich zeigen, den sogenannten Wasserfalleffekt, der von Lenard¹⁾ entdeckt, von ihm und seinen Schülern mehrfach untersucht und neuerdings im Zusammenhange der oben genannten Reihe von Untersuchungen über Berührungslektrizität behandelt worden ist.²⁾

Insbesondere wurden in dieser Arbeit die Änderungen untersucht, welche die Aufladung flüssiger Dielektrika durch einen Gehalt an Elektrolyten erfährt. Die von der Natur und Konzentration des gelösten Elektrolyten abhängigen Einflüsse können bis zur Umkehrung des Ladungssinnes der reinen Flüssigkeiten führen, und es wurde für eine größere Reihe von Säuren, Basen und Salzen die „Umkehrkonzentration“ festgestellt. Lenard konnte zeigen, daß gerade die hier gefundenen Tatsachen sich auf der Grundlage seiner Anschauungen von der Oberflächenbeschaffenheit von Flüssigkeiten deuten lassen.

Für den Ausbau der Theorie schien es nun von besonderem Interesse, den Einfluß der Elektrolyte auf die Ladungerscheinungen nicht nur für den Wasserfalleffekt zu untersuchen, sondern auch an dem Fall der Berührung von Flüssigkeiten mit *festen* Nichtleitern zu verfolgen. Bereits in der oben genannten Arbeit von Coehn und Raydt war die Wirkung von Elektrolyten auf die Steighöhe des Wassers in Betracht gezogen worden. Zahlreiche Arbeiten anderer Autoren haben hier Gesetzmäßigkeiten festzulegen versucht.³⁾ Die Bemühungen werden in den m. isten Fällen beeinträchtigt dadurch, daß bei höheren Elektrolytkonzentrationen die eigentlich elektrolytischen Erscheinungen und damit die Produkte der Zersetzung und der elektrolytischen Überführung sich in den Vordergrund drängen. Die Versuche, die Überführung durch Elektrophorese davon frei zu machen, haben zu einwandfreien Resultaten nicht geführt.⁴⁾

Es sollte daher — als eine Art Analogon zu dem Durchperlen von Gasblasen durch Flüssigkeiten — für die Unter-

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. **46**, p. 584. 1892.

2) A. Coehn u. H. Mozer, Ann. d. Phys. **43**, p. 1048. 1914.

3) Vgl. die Zusammenstellung bei M. v. Smoluchowski in Graetz, Handb. d. Elektrizität und des Magnetismus **2**, p. 366. 1914.

4) Über neuere Anordnungen dazu vgl. Coehn, Zeitschr. f. Elektrochem. **16**, p. 586. 1910 und die Dissertation von J. Franken.

suchung fester Dielektrika gegen nichtleitende und leitende Flüssigkeiten eine Methode ausgearbeitet werden, bei der Stromdurchgang durch die Flüssigkeit und damit elektrolytische Erscheinungen ausgeschlossen sind und die der Forderung genügt, für Sinn und Größe der Aufladung reproduzierbare Ergebnisse zu liefern. Bekanntlich lassen sich — wie zahlreiche Bemühungen in dieser Richtung gezeigt haben — über die Elektrizitätsregung bei der gegenseitigen Berührung fester Stoffe wiederholbare Zahlenwerte nur schwer erhalten.¹⁾ Ein wesentlicher Grund dafür liegt in der schwer reproduzierbaren Weise der Berührung und Trennung. Es erscheint von vornherein wahrscheinlich, daß bei der vollkommeneren Art der Berührung, wie sie das Eintauchen fester Stoffe in Flüssigkeiten ermöglicht, sich für gleich gehaltene Versuchsbedingungen übereinstimmende Resultate ergeben werden.

Als festes Dielektrikum sollte ein gegenüber den verwendeten Flüssigkeiten chemisch möglichst indifferenter Stoff gewählt werden. Paraffin erwies sich in dieser Hinsicht und in einer Reihe anderer Eigenschaften, so in der bequemen Herstellbarkeit gleichmäßiger und reiner Oberflächen, für unsere Versuche besonders geeignet.

Taucht man ein über einer Flamme von etwa anhaftender Ladung befreites Paraffinstück in destilliertes Wasser, so erweist es sich nach dem Herausziehen bei Annäherung an ein gewöhnliches Blättchenelektroskop geladen, und zwar — wie eine dem Elektroskop vorher mitgeteilte Ladung von bekanntem Sinn erkennen läßt — als negativ, entsprechend seiner dem Wasser gegenüber kleineren Dielektrizitätskonstante. Der positive Teil der bei der Berührung sich ausbildenden Doppelschicht hinterbleibt nach der Trennung im Wasser und kann dort, bei Verbindung des — isoliert aufgestellten — Wassers mit dem Elektroskop in entsprechender Größe nachgewiesen werden. Der Ausschlag erfolgt in dem Augenblick, in dem das Paraffinstück aus dem Wasser entfernt wird. Ersetzt man das destillierte Wasser durch Salzsäure von verschiedener Konzentration, so liefert diese primitive Methode für den Ladungssinn die folgenden Ergebnisse:

1) Vgl. den Artikel „Reibungselektrizität“ von Graetz in Graetz, Handb. d. Elektrizität und des Magnetismus 1.

HCl-Konzentration	Ladung der Flüssigkeit
0,0001 normal	+
0,001	+
0,01	+
0,1	+
1,0	-

Während aber die *Richtung* des Ausschlages für dieselbe Flüssigkeit stets die gleiche blieb, erwies sich die *Größe* des Ausschlages von verschiedenen Faktoren abhängig: Außer von der Größe der Paraffinoberfläche von der Tiefe des Eintauchens, von der Geschwindigkeit des Herausführens usw. Um vergleichbare Angaben für verschiedene Lösungen zu erhalten, war es nötig, die in Betracht kommenden Größen durch Verwendung einer mechanischen Bewegungseinrichtung konstant zu erhalten. Die noch verbleibende Forderung, eine stets gleiche, reine, ungeladene Paraffinfläche herzustellen, konnte nach einer ganzen Reihe von Versuchen in der Weise erfüllt werden, daß eine an einem Platinstab mittels Gewinde befestigte Messingvollkugel von Zimmertemperatur durch einmaliges — mit Hilfe der mechanischen Vorrichtung stets mit gleicher Geschwindigkeit erfolgendes — Eintauchen in Paraffin von 110° mit einem Überzug von Paraffin versehen wurde.

Versuchsanordnung.

Die endgültige Versuchsanordnung zeigt Fig. 1.

An dem 2 mm dicken Platinstäbe *P* von 51 mm Länge befindet sich die paraffinierte Metallvollkugel *V* von 22,8 mm Durchmesser. Mit Hilfe eines isolierenden Bernsteinstückchens *B*₁ und nach oben und unten daran gekitteter Messinggewinde lässt sich der Platinstab mit Kugel an dem Bewegungsstäbchen *G* befestigen (vgl. Fig. 2). *G* gleitet an den Führungsstäben *gg* mittels einer Exzenter scheibe, die mit Zwischenschaltungen mehrerer Übersetzungstransmissionen von einem ruhig laufenden Motor getrieben wird, auf und nieder. In ihrer tiefsten Stellung taucht die Kugel *V* in das mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllte Gefäß *B*. Dieses, ein Jenenser Becherglas, trägt ein mit einer Marke versehenes enges Ansatzröhrenchen, um stets genau dieselbe Flüssigkeitshöhe nach einer daran befindlichen Marke einstellen zu können, sowie ein zweites, weiteres Ansatzröhrenchen (nicht gezeichnet), in welches ein Thermometer hineingesenkt werden kann. In

ihrer höchsten Stellung befindet sich V inmitten des Messingdrahtnetzes K . K ist durch einen Draht in bernsteinisolierte

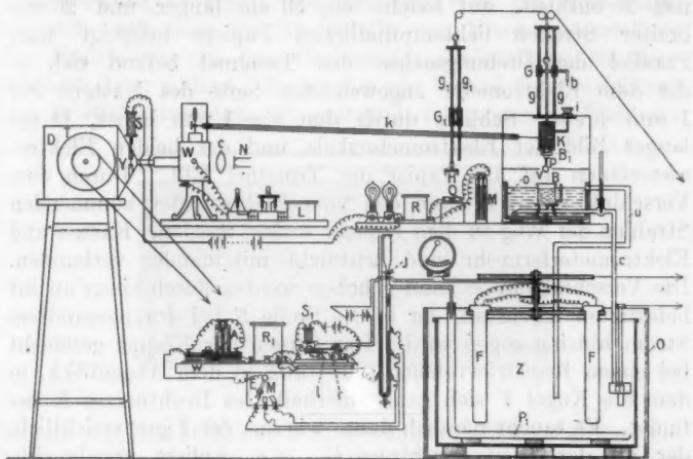


Fig. 1.

Metallhülle k mit den Fäden des Wulffschen Elektrometers W verbunden.¹⁾ Durch eine Krügerbatterie²⁾ L und zwei gut isolierende Kommutatoren kann der Hilfskondensator des Elektrometers auf eine positive oder negative Ladung gebracht sowie auch geerdet werden. Die Beleuchtung der Elektrometerskala erfolgt mit einem Nernststift N und einer zwischen Skala und Lichtquelle angebrachten Konvexlinse C . Um den Elektrometerausschlag in der gleichen Anordnung ablesen und auch photographisch registrieren zu können, wurde das Bild der Elektrometerfäden durch einen unter 45° zur Fernrohrachse aufgestellten Spiegel auf eine Mattscheibe geworfen (nicht gezeichnet) und gelangte

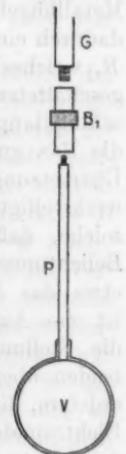


Fig. 2.

1) Das Elektrometer war eines seiner ersten Instrumente, das Hr. Wulff freundlichst zur Verfügung gestellt hatte, wofür auch hier noch einmal der Dank ausgesprochen sei. Das Elektrometer wurde später mit den neuen Einrichtungen (Physik. Zeitschr. 10. p. 251. 1909) versehen und bewährte sich vorzüglich.

2) F. Krüger, Physik. Zeitschr. 7. p. 182. 1906.

außerdem in die angebaute Registrievorrichtung. Diese bestand aus einem lichtdichten Kasten D , der eine Trommel T enthielt, auf welche ein 50 cm langer und 20 cm breiter Streifen lichtempfindlichen Papiers befestigt war. Parallel der Drehungsachse der Trommel befand sich in der dem Elektrometer zugewendeten Seite des Kastens ein 1 mm breiter Schlitz, durch den ein 1 mm hohes, 18 cm langes Bild der Elektrometerskala und der beiden Elektrometerfäden auf das Papier der Trommel fällt. Durch eine Verschlußklappe Y kann den vom Elektrometer kommenden Strahlen der Weg zu dem Papiere verlegt werden. Kasten und Elektrometerfernrohr sind lichtdicht miteinander verbunden. Die Verschlußklappe kann gehoben werden durch einen an ihr befestigten Eisenstab, der in die Spule S bei durchgesandtem Strom hineingezogen wird. Das Öffnen der Klappe geschieht bei einem Registrierversuch selbstdäig in dem Augenblick, in dem die Kugel V sich ganz innerhalb des Drahtnetzes K befindet. Es taucht nämlich dann, wie aus der Figur ersichtlich, der an der Gleitvorrichtung G_1 , $g_1 g_1$ isoliert angebrachte Metallbügel H in die Quecksilbernäpfchen Q und schließt dadurch einen Strom von dem Akkumulator M zu dem Relais R , welches durch vorgeschaltete Lampenwiderstände bei eingeschalteter Lichtleitung (220 Volt) die Bewegung der Verschlußklappe betätigkt. Die Eintauchvorrichtung sowie auch die Bewegung der Trommel T wurde mit Hilfe verschiedener Übersetzungstransmissionen von demselben Motor aus bewerkstelligt, und zwar war die Drehung der Trommel eine solche, daß das lichtempfindliche Papier zwischen je zwei Belichtungen um 1 mm vorrückte, so daß ein einzelnes Blatt etwa das Aussehen der Fig. 3 erhält. Jede schwarze Linie ist eine Aufnahme. Die weißen Punkte in den Linien zeigen die Stellungen der Fäden des Wulffelektrometers an. Die beiden obersten Linien geben die Stellung der Fäden bei gerdetem, die beiden nächsten bei mit Hilfsladung aufgeladenem Elektrometerkondensator. Nach der nächsten Unterbrechung der Linien ist der Versuch in Gang gesetzt und man sieht an der ersten Fadenstellung, daß die Fäden zusammen gegangen sind; nach dem zweiten Eintauchen sind sie noch mehr zur Nullstellung gerückt, es hat sich also die Aufladung vergrößert. Bei der dritten und den folgenden Aufnahmen sind

die Fäden von der Kondensatorstellung aus durch die Nullstellung gegangen, um sich wieder zu spreizen. Von der dritten Fadenstellung ab erhält man also den Wert des Ausschlages dadurch, daß man die Skalenteile von Kondensatorstellung bis Nullstellung zu den Skalenteilen Nullstellung bis Ausschlagstellung addiert. Es ist dies ein Vorteil der Einrichtung des Wulffelektrometers, die gestattet, bei passender Wahl der



Fig. 3.

Hilfsladung den Meßbereich zu verdoppeln. Würde in unserem Falle der Kondensator die entgegengesetzte Ladung tragen, so würden die Fäden sich von vornherein spreizen und nach dem dritten Wert aus der Skala gehen.

Zur Erzielung konstanter verschiedener Temperaturen der zu untersuchenden Flüssigkeiten diente folgende Anordnung: Das Versuchsgefäß *B* stand in einem Holzbottich so, daß der Spiegel des Wassers, welches man mittels der Zentrifugalpumpe *m* (nach Luther) durch das Steigrohr *c* dem Bottich zuführte, ungefähr bis 1 cm unter den Rand des Gefäßes *B* steigen konnte, um dann durch das weitere Rohr *u* wieder in den Thermostaten *Z* zurückzufließen. Holzbottich mit Versuchsgefäß, sowie das Netz *K* befanden sich in einem geerdeten Kasten aus verzinktem Eisenblech, um störende äußere Einflüsse fernzuhalten. Zwischen Netz und Versuchsgefäß war ferner eine geerdete Metallplatte mit einer Öffnung in der Mitte zum Durchlassen der Kugel *V* eingeschoben, um zu verhindern, daß bei stärkerer Erwärmung des Wassers in dem Holzbottich Wasserdämpfe in die Höhe des Netzes steigen und die Bernsteinisolationen schädigen. *Z* ist ein verzinkter Eisenblechkessel von 35 cm Höhe und 50 cm Durchmesser. Er stand in einem größeren Holzgefäß *O* von 45 cm Höhe und 75 cm Durchmesser. Für Versuche unter Zimmertemperatur

wurde der Zwischenraum von Z und O mit Eiswasser, für höhere Temperatur mit fließendem Leitungswasser beschickt. Die Heizung des in Z befindlichen Wassers geschah durch zwei an einer rotierenden Scheibe befestigte, zylinderförmige Heizkörper F aus Nickel, die durch ihre Rotation gleichzeitig als Rührer wirkten.¹⁾ Die Stromzuführung zu den in den Nickelzylindern in Sand eingebetteten Drahtwiderständen erfolgte durch Schleifringe. Eine mit Petroleum gefüllte Kupferspirale P_1 mit eingekittetem Glasrohr (wie aus der Figur ersichtlich) diente als Thermoregulator und bewirkte ein selbsttägiges Ausschalten der Heizung beim Erreichen der gewünschten Temperatur und Wiedereinschalten beim Sinken unter diese Temperatur. In dem einen Schenkel des Regulator- U -Rohres waren drei, in den anderen ein Ansatzröhren mit Platinalektroden angebracht. Die Schenkel wurden mit Quecksilber gefüllt. Der Akkumulator A_1 war geschlossen durch einen Widerstand w von 800 Ohm. Im Nebenschluß lagen das Relais R_1 und das Regulatorrohr. Von der Schalttafel M konnte der Strom durch je eins der Ansatzröhren gesandt werden. In der Figur ist die Stromzuleitung zu der oberen Elektrode des U -Rohrs eingestellt. Da die Quecksilbersäule nicht mehr mit der Elektrode in Verbindung steht, ist der Strom ausgeschaltet. Würde der Schaltthebel E des Schalters auf die mittlere Stellung gerückt, so würde der Strom durch den Nebenschluß fließen, das Relais R_1 würde betätigt, die Spule S_1 zöge das Eisenstückchen e des Heizstromschlüssels r an und schlösse hier den Heizstrom in dem evakuierten, mit Quecksilber gefüllten Röhrchen l aus Glas. Die Temperaturen, die mittels des Schalters M erhalten wurden, waren 18° , 24° und 30° . Durch Zu- und Abfließenlassen von Quecksilber im U -Rohr, sowie auch durch Öffnen des Hahnes J konnten auch andere Temperaturen eingestellt werden. Als Versuchstemperaturen unter Zimmertemperatur wurden aus Zweckmäßigkeitgründen später nur Eiswassertemperatur (der Holzbottich O wurde dazu mit Eis gefüllt) und die Temperatur des fließenden Leitungswassers (etwa 18°) gewählt.

1) Der hier beschriebene Thermostat, in welchem die elektrischen Heizkörper als Rührer ausgebildet sind, ist nach unseren Angaben von der Firma Gebrüder Ruhstrat in Göttingen ausgeführt worden und kann von dort bezogen werden.

Gang der Untersuchung.

Ein Versuch geht in folgender Weise vor sich: Zunächst wird jedesmal die Metallkugel V frisch paraffiniert. Zu diesem Ende wird sie bis zum Schmelzen des vom vorhergehenden Versuche darauf befindlichen Paraffins erhitzt und mit einem Tuche sorgfältig abgerieben. Alsdann stellt man die Kugel in Alkohol, zur schnelleren Abkühlung wie auch zur Entfernung etwa anhaftender Teilchen. Inzwischen wird in einem Porzellantiegel Paraffin, welches vorher durch gehärtetes Filterpapier filtriert worden ist, geschmolzen und auf 110° gebracht. Währenddem hat man die Kugel aus dem Alkohol entfernt, getrocknet, mit einem Lederstück abgerieben und poliert und an das Gestänge G bei B_1 (Fig. 1) angeschraubt. Die Art der Befestigung ist in Fig. 2 (p. 1009) dargestellt. An die Stelle des Versuchsgefäßes bringt man nun den Porzellantiegel mit dem geschmolzenen Paraffin von 110° und läßt durch Einschalten des Motors die Kugel *einmal* in das Paraffin eintauchen. Da Eintauchhöhe und Eintauchgeschwindigkeit stets die gleichen sind, wie auch die Temperaturunterschiede von Kugel und Paraffin, kann man gewiß sein, einen stets gleichen Überzug zu erhalten. Man hat damit für jeden Versuch eine Paraffinkugel von stets gleicher Oberfläche zur Verfügung. Der Überzug ist gleichmäßig glatt und zeigt nur am unteren Pole eine kleine Verdickung, die aber in jedem Falle die gleiche ist. Der Überzug ist im Mittel 1 mm dick, so daß die Paraffinkugel einen Durchmesser von 24,8 mm besitzt.

Nun wird an die Stelle des Porzellantiegels das Versuchsbecherglas B gebracht, welches mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist, und zur Erreichung der gewünschten Temperatur der Thermostat in Gang gesetzt. Die Temperatur ist an einem in das weite Ansatzröhren des Versuchsgefäßes B eingesenkten Thermometer abzulesen. Danach tritt die Eintauchvorrichtung in Tätigkeit. Dient als Versuchsflüssigkeit Leitfähigkeitswasser von Zimmertemperatur, so wird folgendes eintreten:

Es sei (vgl. Fig. 4) der Hilfskondensator H des Elektrometers auf ein negatives Potential aufgeladen. Dann werden die beiden Fäden des Elektrometers sich spreizen, indem sie durch Influenz eine positive Ladung annehmen, der eine gleich große negative Ladung auf dem anderen Ende des Systems,

also dem Netze K entspricht. (Die Fäden sind hier der Deutlichkeit wegen, wie beim gewöhnlichen Blättchenelektroskop, nur oben zusammenhängend gezeichnet, während sie in Wirklichkeit beim Wulffelektrometer auch unten vereinigt sind.) Taucht nun die paraffinierte Kugel V in das Wasser des Versuchsgefäßes, so bildet sich eine Doppelschicht an der Grenze der beiden Stoffe, deren positiver Teil im Wasser, dem Stoffe von höherer Dielektrizitätskonstante, und deren negativer Teil an der Paraffinoberfläche liegt. Wird die Kugel

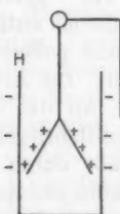


Fig. 4.



Fig. 5.

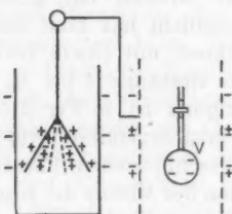


Fig. 6.

aus dem Wasser herausgeführt, so findet ein Auseinanderreißen der Doppelschicht statt. Gelangt jetzt die negativ geladene Kugel in das Netz K , so wirkt ihre Ladung influenziert auf das Netz (Fig. 5). Die negative Ladung der Kugel zieht eine gleich große positive Ladung in das Netz und treibt eine gleich große negative Ladung in die Fäden des Elektrometers, deren Ausschlag also unmittelbar das Potential der Paraffinkugel angibt. Da die Fäden durch den Hilfskondensator schon eine positive Ladung besitzen, werden sie in diesem Falle zusammengehen müssen. Spreizen der Fäden würde eintreten, wenn die Kugel V eine positive Ladung besäße.

Bei negativer Aufladung des Elektrometerkondensators zeigt also ein Zusammengehen der Fäden positive, ein Spreizen negative Ladung der Flüssigkeit an.

Beim Herabgleiten der Kugel aus dem Netz verschwindet die induzierte Ladung. Der Zustand entspricht dann wieder der Fig. 4. Um aber die der Nullladung des Netzes K entsprechende Stellung genau zu fixieren, taucht beim Herabgleiten der Kugel der an dem geerdeten Gestänge G befindliche Metallstift b in das auf Bernstein isolierte, mit dem Netz K verbundene Quecksilbernäpfchen i . Damit wird das Netz K geerdet und die darauf befindliche negative Ladung entfernt, so daß das System nur im Elektrometer selbst die positive (von der negativen Kondensatorladung herrührende) Ladung auf den Fäden besitzt (Fig. 6).

Zu bemerken ist noch, daß die Bernsteinisolation B_1 zwischen dem Gestänge G und dem Platinstab P notwendig ist, da ohne sie überhaupt keine Aufladung wahrgenommen werden könnte. Es influenziert ja (Fig. 7) die Ladung des Paraffins auf der darunter liegenden Metalloberfläche ebenfalls eine Ladung von gleicher Größe und entgegengesetztem Vorzeichen und eine entsprechende gleichgerichtete an dem Ende des Platinstabes P . Würde die letztere abgeleitet, wie es der Fall wäre, wenn der Stab P an dem geerdeten Gestänge G leitend befestigt wäre, so würden die beiden gleich großen, entgegengesetzten Ladungen auf Paraffin und Metallkugeloberfläche nach außen keine Wirkung ausüben können.

Versuche mit Leitfähigkeitswasser.

Zuerst wurde die Aufladung des Paraffins gegen destilliertes Wasser untersucht, das besonders sorgfältig mit Hilfe eines Quarzkühlers vor jedem Versuch frisch hergestellt war. Es hatte sich gezeigt, daß längeres Aufbewahren auch in Jenaer Glas die Werte auffallend herabdrückte. Das Untersuchungsgefäß B (Fig. 1) wird vor jedem Versuch einige Zeit ausgedampft.

Läßt man eine frisch paraffinierte Kugel durch Einschalten des Motors einmal in das Wasser eintauchen und

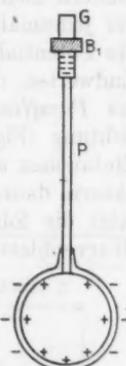


Fig. 7.

dann in das Netz K emporsteigen, so zeigt sich ein Ausschlag der Elektrometerfäden. Die Summe der Ausschläge beider Fäden ergibt gemäß der Eichkurve des Elektrometers das Potential der Kugel, v Volt. Entfernt man nun die Kugel, paraffiniert sie aufs neue, und wiederholt mit der gleichen Flüssigkeit dieselbe Art der Messung mittels einmaligen Eintauchens und verfährt so verschiedene Male, so erhält man Werte für das Potential der Kugel, die von dem ersten Werte v in den meisten Fällen erheblich abweichen. Läßt man aber die Kugel nach jeder neuen Paraffinierung nicht *einmal*, sondern mehrmals hintereinander eintauchen, so bemerkt man bei jedesmaligem Emporsteigen in das Netz ein Anwachsen des Potentials und schließlich die Einstellung eines konstanten Endwertes, *der in gleicher Höhe auch nach jeder Erneuerung des Paraffinüberzuges erreicht wird*. Die mechanische Vorrichtung (Fig. 1) bewirkte bei den definitiven Versuchen das Eintauchen alle drei Sekunden; die Einstellung des Endwertes dauerte dann ungefähr eine Stunde. Den Gang der Aufladung zeigt die folgende Tabelle und deren graphische Darstellung (Kurvenblatt 1).

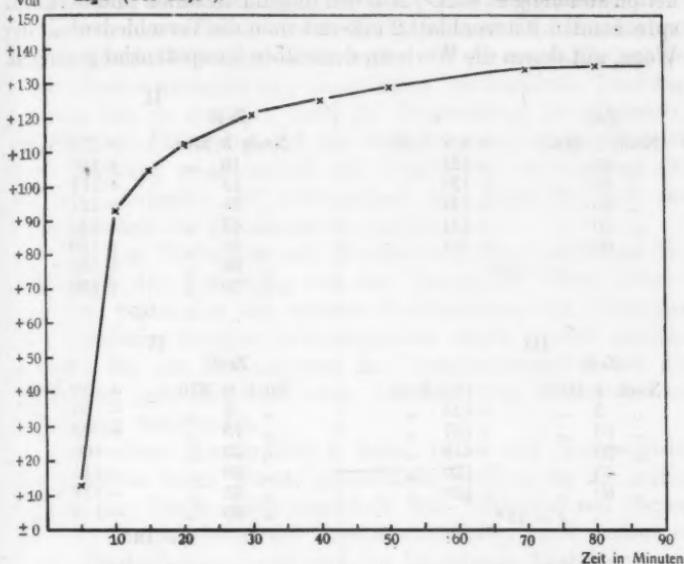
Zeit	v
0	+ 13 Volt
Nach 5 Min.	+ 93 "
" 10 "	+ 105 "
" 15 "	+ 112 "
" 25 "	+ 121 "
" 35 "	+ 125 "
" 45 "	+ 129 "
" 55 "	+ 136 "
" 65 "	+ 134 "
" 75 "	+ 135 "

Als Vorzeichen ist — um im Hinblick auf das Folgende einheitliche Bezeichnung zu brauchen — nicht das der Paraffinkugel, sondern das der Flüssigkeit angegeben. Die Ladung in elektrostatischen Einheiten ist — da der Radius und damit die Kapazität der Kugel 1,24 cm beträgt — für das Potential v der Kugel $1,24 \cdot v / 300$.

Die Endwerte sind für *gleiche* Versuchsflüssigkeiten bis auf geringe Schwankungen gut reproduzierbar. Sie also sind es, die zu vergleichenden Messungen für *verschiedene* Flüssigkeiten heranzuziehen sind. Im Gegensatz zu diesen Endwerten scheinen die Anfangswerte von unkontrollierbaren Zufällig-

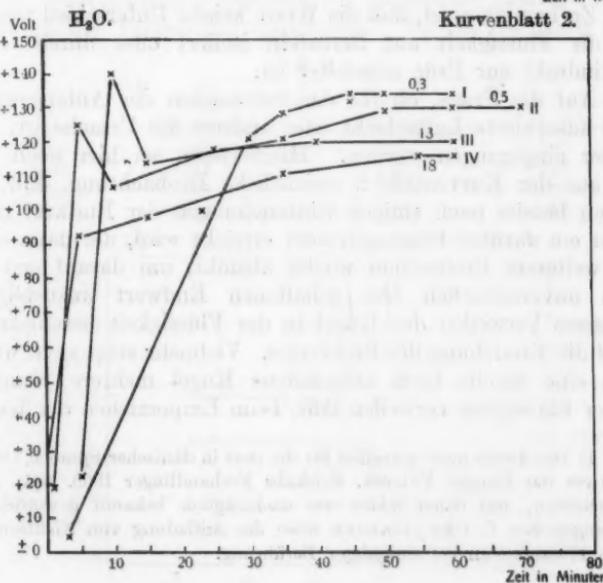
H_2O (bei $18,5^\circ$).

Kurvenblatt 1.



H_2O .

Kurvenblatt 2.



keiten abhängig zu sein.¹⁾ Aus den folgenden Zahlen und dem entsprechenden Kurvenblatt 2 erkennt man die Verschiedenheit der Wege, auf denen die Werte zu demselben Endpotential gelangen.

I		II	
Zeit	v	Zeit	v
Nach 3 Min.	+ 4,5 Volt	Nach 5 Min.	+ 22,5 Volt
„ 30 „	+ 121 „	„ 10 „	+ 140 „
„ 35 „	+ 128 „	„ 15 „	+ 114 „
„ 45 „	+ 134 „	„ 35 „	+ 121 „
„ 50 „	+ 134 „	„ 45 „	+ 132 „
„ 60 „	+ 134 „	„ 50 „	+ 129 „
$t = 0,3^0$		„ 60 „	+ 130 „
		„ 70 „	+ 130 „
			$t = 0,5^0$
III		IV	
Zeit	v	Zeit	v
Nach 1 Min.	+ 19,5 Volt	Nach 0 Min.	+ 29 Volt
„ 5 „	+ 125 „	„ 5 „	+ 93 „
„ 10 „	+ 107 „	„ 15 „	+ 98 „
„ 30 „	+ 118 „	„ 23 „	+ 100 „
„ 45 „	+ 120 „	„ 40 „	+ 111 „
„ 60 „	+ 120 „	„ 55 „	+ 116 „
$t = 13^0$		„ 60 „	+ 116 „
			$t = 18^0$

Zu bemerken ist, daß die Werte keinen Unterschied zeigen, ob die Flüssigkeit auf Bernstein isoliert oder durch einen Platindraht zur Erde abgeleitet ist.

Auf die Frage, ob für das Schwanken der Anfangswerte eine adsorbierte Luftsicht oder anderes die Ursache ist, soll später eingegangen werden. Hingewiesen sei hier noch auf die aus der Kurventafel 2 ersichtliche Beobachtung, daß zuweilen bereits nach einigen Eintauchungen der Endwert oder sogar ein darüber hinausgehender erreicht wird, der dann aber bei weiterem Eintauchen wieder absinkt, um darauf erst zu dem unveränderlich fest gehaltenen Endwert anzusteigen. Längeres Verweilen der Kugel in der Flüssigkeit beschleunigt nicht die Erreichung des Endwertes. Vielmehr zeigt sich, wenn man eine bereits hoch aufgeladene Kugel mehrere Stunden in der Flüssigkeit verweilen läßt, beim Emporziehen der Kugel

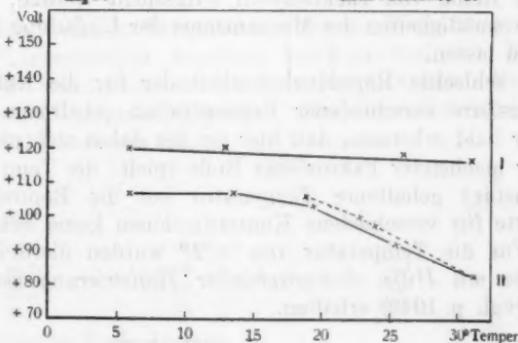
1) Das dürfte auch zutreffen für die (nur in dänischer Sprache, *Over-sigt over det Danske Vidensk. Selskabs Forhandlinger* 1909, 581, veröffentlichten, uns daher erst nachträglich bekannt gewordenen) Messungen von C. Christiansen über die Aufladung von Nichtleitern gegen Flüssigkeiten bei einmaliger Berührung.

in das Netz, daß die Ladung bis nahe zum Verschwinden abgenommen hat und erst durch häufig wiederholtes Eintauchen zur früheren Höhe gesteigert wird. Wenn auch für einige dieser Beobachtungen hier noch keine einwandfreie Deutung gegeben ist, so gewährt doch die Feststellung der *Tatsache, daß für jede Flüssigkeit sich ein leicht reproduzierbarer Endwert der Aufladung angeben läßt, die Möglichkeit zur Lösung der gestellten Aufgabe: die Abhängigkeit der Aufladung von der Beschaffenheit der Flüssigkeit zu studieren.*

Bei den Versuchen mit Wasser war eine auffällige Abhängigkeit der Aufladung von der Temperatur nicht hervorgetreten. Als aber die spätere Untersuchung der Salzsäure eine deutliche Temperaturabhängigkeit ergab, wurde zurückgreifend für alle Flüssigkeiten der Temperatureinfluß auf die Aufladung mit Hilfe der oben beschriebenen Thermostatenanordnung untersucht.

Aus dem Kurvenblatt 2 kann nicht auf Temperaturabhängigkeit beim Wasser geschlossen werden, da die Differenzen der Werte noch innerhalb der Fehlergrenzen liegen. Für die Untersuchung der Temperaturabhängigkeit genügt es nicht, Beobachtungen während des langsamen Ansteigens und Sinkens der Temperatur anzustellen. Die Werte liegen dann

H ₂ O.			
I	II	I	II
<i>t</i> ⁰	<i>v</i>	<i>t</i> ⁰	<i>v</i>
6,0	+ 120 Volt	6,0	+ 107 Volt
13,0	+ 120 "	13,7	+ 107 "
21,0	+ 117 "	19,4	+ 103 "
26,0	+ 118 "	25,5	+ 92 "
31,0	+ 116 "	31,1	+ 83 "

H₂O.

durchaus unregelmäßig und hinken merklich der Temperatur nach. Es ist vielmehr nötig, für jede einzelne Temperatur den Endwert sich einstellen zu lassen. Die Aufnahme der Werte für fünf Temperaturen in beiden Richtungen erfordert auf diese Weise 8—10 Stunden.

Die Reihe I der Aufnahmen und die Gerade I der zu gehörigen graphischen Darstellung gibt die Werte für frisch und mit besonderer Sorgfalt destilliertes Wasser: Zwischen 6° und 31° ist kein die Fehlergrenzen überschreitender Temperatureinfluß zu erkennen. Daß geringe Spuren von Verunreinigungen diesen Zustand schon stark ändern, erkennt man aus der unter II registrierten Aufnahme, die mit gewöhnlichem, einige Zeit aufbewahrtem destillierten Wasser ausgeführt worden sind. Die Aufladung ist hier erheblich geringer und sie zeigt außerdem eine starke Abnahme mit ansteigender Temperatur. Daß diese Abnahme ein Temperaturphänomen ist und nicht von weiter fortschreitender Verunreinigung des Wassers, etwa aus der Zimmerluft, herrührt, zeigt sich in dem an Kurve II gestrichelt dargestellten Wiederanstiegen der Aufladung beim Rückgang der Temperaturerhöhung.

Die Aufladung elektrolytisch leitender Lösungen.

Die Aufladung von Paraffin gegen Wasser wird vermindert durch die Anwesenheit von Elektrolyten. Und wie bereits der Vorversuch p. 1008 gezeigt hat, kann diese Herabsetzung bis zur Umkehr des Ladungssinnes gehen. Es sollte nun — gerade wie das in der Arbeit von Coehn und Mozer für die Ladungserscheinungen beim Durchperlen von Gasblasen durch Flüssigkeiten geschehen ist — die „Umkehrkonzentration“ für eine Reihe von Elektrolyten aufgesucht werden, um so die Gesetzmäßigkeiten des Mechanismus der Umladung hervortreten zu lassen.

Die schlechte Reproduzierbarkeit der für die Aufladung von Salzsäure verschiedener Konzentration erhaltenen Werte ließ sehr bald erkennen, daß hier ein bis dahin sich nicht bemerkbar machender Faktor eine Rolle spielt: die Temperatur. Bei konstant gehaltener Temperatur bot die Reproduktion der Werte für verschiedene Konzentrationen keine Schwierigkeit. Für die Temperatur von $+2^{\circ}$ wurden die folgenden Endwerte mit Hilfe photographischer Registrierung der Ausschläge (vgl. p. 1010) erhalten.

HCl.	
Konzentration	
0,8-normal	Potential
0,55 "	- 6 Volt
0,40 "	- 2 "
0,10 "	± 0 "
	+ 6 "

Salzsäure von $+2^\circ$ zeigt also bei einem Gehalt von 0,4 g-Äquivalent im Liter gegen Paraffin überhaupt keine Aufladung, lädt sich in geringerer Konzentration positiv — im gleichen Sinne wie Wasser — und bei höherer Konzentration umgekehrt. Um einen Begriff von der Einstellung und von der Konstanz der Endwerte zu geben, seien hier (in Fig. 8a, b) ein Anfangsstück und ein Endstück solcher photographischer Registrierungen wiedergegeben. Die Erklärung siehe p. 1010 f.

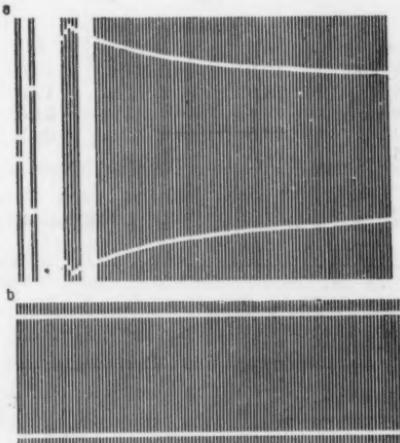


Fig. 8.

Die weiteren Versuche sind in der Weise ausgeführt, daß die Konzentration konstant gehalten und die Temperatur variiert wurde und so für jede Konzentration die Umkehrtemperatur aufgesucht wurde. Die Ergebnisse für Salzsäure und Schwefelsäure sind:

HCl.		II 0,1-n.
I 1/1-n.	t^0	
1,3	v - 14 Volt	t^0 1,5
13,0	" 16 "	
22,0	" 40 "	v + 6 Volt + 6 "
26,0	" 58 "	

III

0,001-n.

t°	v	t°	v
12,0	+ 18 Volt	24,0	- 4 Volt
13,0	+ 17 "	29,0	- 24 "
18,2	+ 12 "	31,5	- 32 "
20,5	+ 7 "	32,2	- 34 "
21,0	+ 5 "	33,2	- 38 "
21,2	+ 3 "	34,0	- 40 "
21,5	+ 2 "	35,0	- 35 "
22,0	\pm 0 "	35,7	- 23 "
22,1	- 2 "		

 H_2SO_4 .

I

II

III

1/1-n.

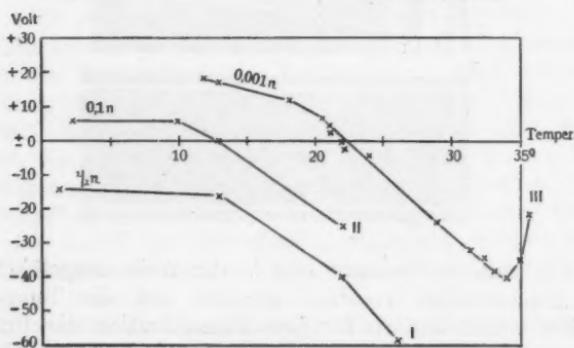
0,01-n.

0,001-n.

t°	v	t°	v	t°	v
0,5	- 3 Volt	15,0	+ 12 Volt	13,0	+ 25 Volt
7,0	- 3 "	18,0	+ 2 "	17,0	+ 18 "
14,0	- 8 "	18,4	- 1 "	21,5	- 8 "
26,0	- 30 "	20,5	- 19 "	28,3	- 54 "
31,8	- 56 "	21,5	- 23 "		

HCl.

Kurvenblatt 4.

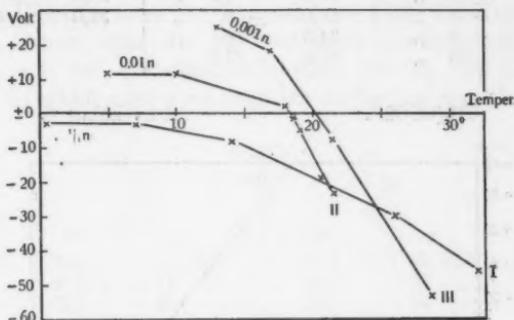


Man erkennt aus den Tabellen und graphischen Darstellungen, daß Temperaturerhöhung wie eine Konzentrationsvermehrung wirkt: negativierend (bezogen wie immer auf den Sinn der Flüssigkeitsladung). Bei festgehaltener Temperatur kann also der Sinn der Aufladung durch Änderung der Konzentration umgekehrt werden und entsprechend bei

festgehaltener Konzentration durch eine Änderung der Temperatur. Betont aber sei noch einmal, daß für Vergleiche nur die erst nach häufigem Eintauchen sich einstellenden konstant

H₂SO₄.

Kurvenblatt 5.



bleibenden Endwerte in Betracht zu ziehen sind. Die Temperatur ist nach oben hin bei etwa 34° durch Weichwerden des Paraffins begrenzt, es tritt dann (vgl. Kurve III für HCl) Abnahme der Aufladung ein. Es gelingt aber, auch bei den geringsten angewandten Konzentrationen für HCl und H₂SO₄, d. i. 0,001-n., die bei 12,5° Aufladungen von etwas über + 20 Volt zeigen, durch Steigerung der Temperatur das Negativwerden der Flüssigkeit zu erreichen. Dagegen wirken 1,0-n. Lösungen dieser Säuren bereits bei Zimmertemperatur so stark negativierend, daß Temperaturerniedrigung bis gegen 0° kein Positivwerden der Flüssigkeit herbeiführt. Die unmittelbar sich bietende Auffassung der Erscheinungen, die auch mit den von Lenard entwickelten Anschauungen in Einklang steht, ist die Annahme, daß das Wasserstoffion der Lösung an die gegen Wasser negativ sich ladende Paraffinkugel gelangt und deren Ladung bei geringer Konzentration neutralisiert und bei höherer Konzentration umkehrt.¹⁾ Dem entspricht, daß schwächere Säuren in gleicher Normalität weniger wirksam sind:

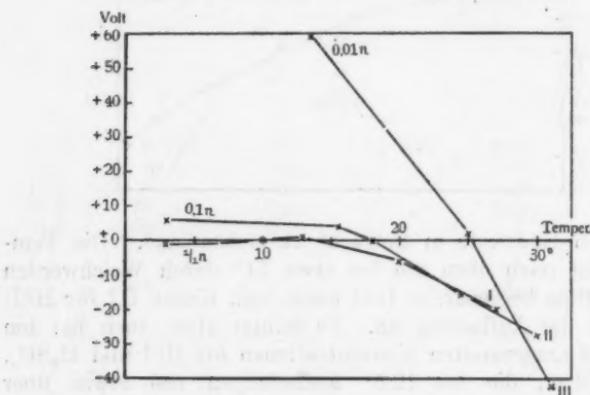
1) Wie solche Anreicherung von Wasserstoff über die Neutralisation hinaus gedeutet werden kann, siehe bei Lenard, Ann. d. Phys. 47. p. 506. Anm. 1. 1915.

CH₃COOH.

I		II		III	
1/l-n.		0,1-n.		0,01-n.	
<i>t</i> ⁰	<i>v</i>	<i>t</i> ⁰	<i>v</i>	<i>t</i> ⁰	<i>v</i>
3,0	- 1 Volt	3,0	+ 5,5 Volt	13,5	+ 59 Volt
10,2	± 0 "	15,5	+ 4,0 "	25,0	+ 2 "
13,0	+ 1 "	18,0	± 0 "	31,0	- 43 "
20,0	- 6 "	24,5	- 16 "		
27,0	- 20 "	30,0	- 27,5 "		

CH₃(COOH).

Kurvenblatt 6.



Man erkennt, daß Essigsäure in normaler Lösung auch bei 18° noch keine deutliche Umkehr des Ladungssinnes bewirkt, wo Schwefelsäure sich bereits zu - 8 Volt und Salzsäure zu - 16 Volt auflädt. 0,01-n. Essigsäure ändert die Ladung des Wassers so wenig, daß sie bei 18° noch + 60 Volt Aufladung zeigt (0,01-n. H₂SO₄ zeigt bei 18° + 0,9 Volt) und erst bei 25° negativ wird (0,01-n. H₂SO₄ bei 17°). Die stärker dissozierte Oxalsäure verhielt sich der Schwefelsäure ähnlicher: 0,01-n. (COOH)₂ wird bei etwa 16° negativ.

Die in den folgenden Tabellen und den Kurventafeln 9—16 mitgeteilten Versuche über Lösungen von *Basen* und *Salzen* sind in der Absicht ausgeführt worden, die *Umkehrkonzentration* für eine möglichst große Reihe von Elektrolyten bei ihrer Aufladung gegen Paraffin festzustellen. Wie man aber aus den Zahlen und graphischen Darstellungen sieht, ist eine Umkehr

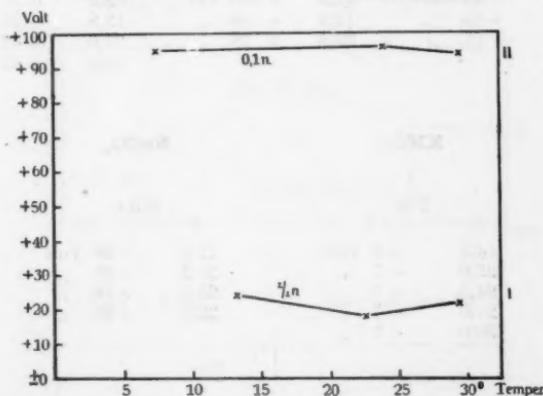
der Ladung in der Regel überhaupt nicht erreichbar. Die Wirkung der metallischen Kationen ist im Vergleich zu der des Wasserstoffs so gering, daß die Umkehrkonzentration sich aus den Messungen an Lösungen von verschiedenem Gehalt zwar extrapolieren, aber nicht erreichen läßt, da die Löslichkeit der Elektrolyte in der Mehrzahl der Fälle dazu nicht ausreicht. Kann aber die Konzentration genügend gesteigert werden, wie bei der einfachnormalen Lösung von Lithiumchlorid, so erhält man auch negative Aufladung der Flüssigkeit.

NaOH.

I		II	
t°	1/1-n.	t°	0,1-n.
13,2	+ 24 Volt	12,5	+ 95 Volt
22,5	+ 18 "	24,0	+ 95 "
29,5	+ 22 "	29,5	+ 94 "

NaOH.

Kurvenblatt 7.

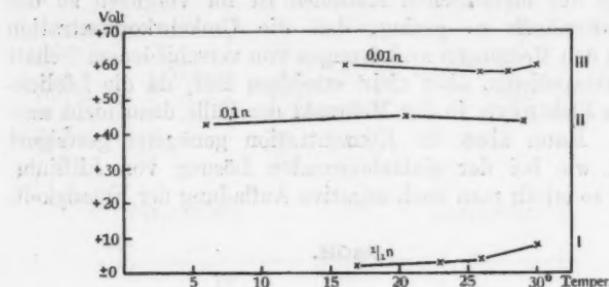


KOH.

I		II		III	
t°	1/1-n.	t°	0,1-n.	t°	0,01-n.
16,8	+ 2 Volt	6,0	+ 43 Volt	16,2	+ 60 Volt
23,0	+ 3 "	20,5	+ 45 "	26,0	+ 58 "
26,0	+ 4 "	29,0	+ 43,5 "	28,0	+ 58 "
30,0	+ 8 "			30,0	+ 60 "

KOH.

Kurvenblatt 8.



KCl.

NaCl.

I		II		III	
3-n.		0,01-n.		3-n.	
t°	v	t°	v	t°	v
12,0	+ 45 Volt	10,5	+ 100 Volt	2,2	+ 25 Volt
23,5	+ 45 "	12,8	+ 98 "	13,8	+ 31 "
27,0	+ 45 "	26,8	+ 78 "	27,0	+ 42 "
				32,0	+ 42 "

KNO₃.NaCO₃.

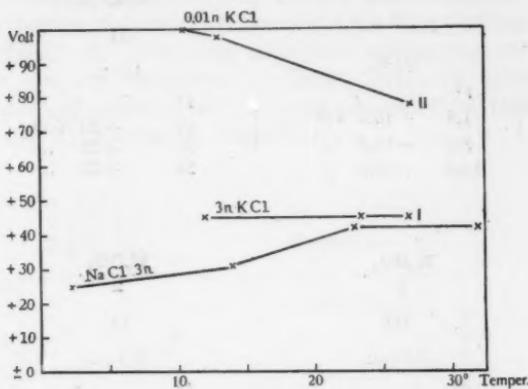
I		II	
2-n.		0,5-n.	
t°	v	t°	v
14,3	+ 8 Volt	12,0	+ 36 Volt
22,0	+ 7 "	20,2	+ 36 "
24,5	+ 7 "	25,0	+ 28 "
27,8	+ 7 "	32,5	+ 25 "
30,0	+ 7 "		

LiCl.

I		II	
4-n.		0,1-n.	
t°	v	t°	v
13,0	- 3 Volt	13,3	+ 25 Volt
18,0	- 3 "	21,0	+ 46 "
20,0	- 3 "	28,0	+ 50 "
21,5	- 3 "		
23,0	- 3 "		

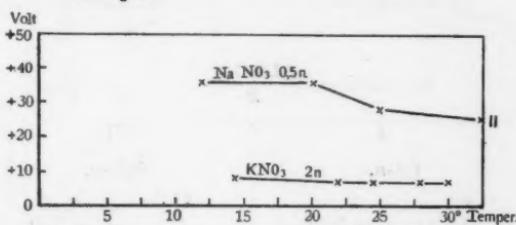
KCl I u. II.
NaCl II.

Kurvenblatt 9.



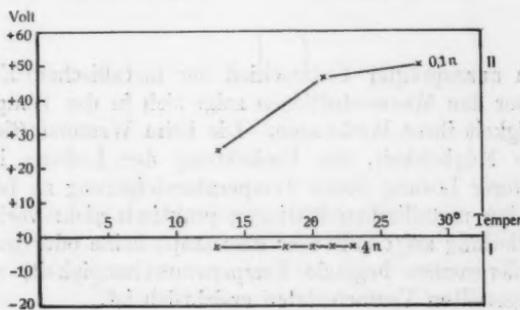
KNO₃ I.
NaNO₃ II.

Kurvenblatt 10.



LiCl + 2 H₂O.

Kurvenblatt 11.



ZnSO_4 .

I

1/1-n.

t^0	v
1,8	+ 15,5 Volt
8,2	+ 15,5 "
14,0	+ 25,5 "

 $\frac{\text{K}_2\text{SO}_4}{2}$.

II

1/1-n.

t^0	v
16	+ 24 Volt
20	+ 22 "
24	+ 22 "

 $\frac{\text{K}_2\text{SO}_4}{2}$.

III

0,01-n.

t^0	v
17,5	+ 48 Volt
19,0	+ 52 "
27,0	+ 50 "

 $\frac{\text{K}_2\text{CO}_3}{2}$.

IV

0,1-n.

t^0	v
2,0	+ 12 Volt
24,5	+ 30 "
28,0	+ 23 "

 $\frac{\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3}{2}$.

I

0,1-n.

t^0	v
1,5	+ 4 Volt
13,2	- 1 "
23,5	- 27 "
29,5	- 44 "

II

0,01-n.

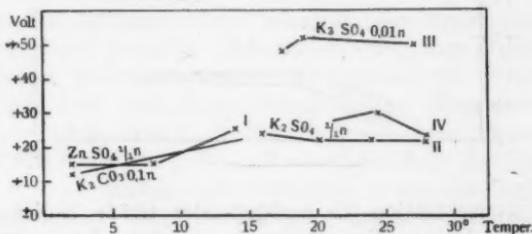
t^0	v
4,5	+ 4 Volt
13,0	- 7 "
28,8	- 52 "

Ein ausgeprägter Unterschied der metallischen Kationen gegenüber den Wasserstoffionen zeigt sich in der Temperaturabhängigkeit ihrer Wirkungen. Die beim Wasserstoffion festgestellte Möglichkeit, die Umkehrung der Ladung in konzentrierterer Lösung durch Temperatursteigerung zu bewirken ist bei den metallischen Kationen praktisch nicht vorhanden. Die Aufladung zeigt entweder überhaupt keine oder innerhalb der Fehlerngrenzen liegende Temperaturabhängigkeit, wie aus den mitgeteilten Versuchsdaten ersichtlich ist.

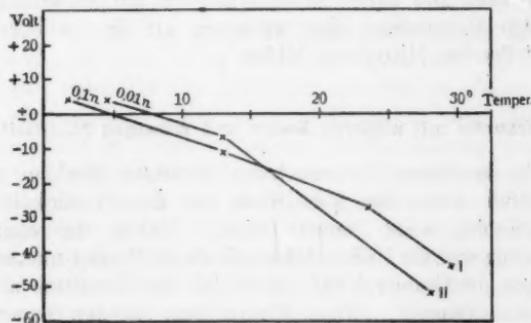
In einer Salzlösung, die, wie Aluminiumsulfat, durch Hydrolyse sauer ist, überwiegt der Einfluß des Wasserstoffions: sie kehrt bereits in geringer Konzentration die Ladung um und der Effekt der Aufladung zeigt eine ausgesprochene Abhängigkeit von der Temperatur. Einige Daten für geringere Konzentrationen sollen an dieser Stelle nur auf die Abhängigkeit von der Konzentration hinweisen.

ZnSO_4 I
 K_2SO_4 II u. III.
 K_2CO_3 IV.

Kurvenblatt 12.

 $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$.

Kurvenblatt 13.

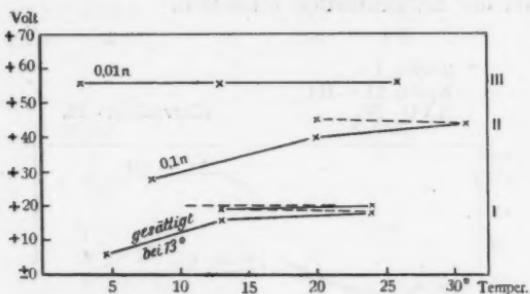


Die beiden Hauptergebnisse dieses Abschnitts sind also: Unabhängigkeit der Aufladung von Alkali- und Salzlösungen von der Temperatur und — in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle — Unmöglichkeit, Umkehrkonzentrationen zu er-

reichen. Die Untersuchung über die spezifische Wirksamkeit der verschiedenen Ionen, den Einfluß des Ladungssinnes, der Wertigkeit und der Wanderungsgeschwindigkeit, kann also hier nicht — wie bei dem „Wasserfalleffekt“ — sich der

K₄FeC₈.

Kurvenblatt 14.



Umkehrkonzentration als maßgebender Größe bedienen. Es sind vielmehr zu diesem Zweck — statt Konzentrationen gleicher Wirksamkeit aufzusuchen — die Änderungen festzustellen, welche die Aufladung reinen Wassers durch Zusatz von Alkalien und Salzen in äquivalenten Mengen erfährt. Dies wird den Gegenstand einer späteren, an die vorliegende sich anschließenden Mitteilung bilden.

Versuche mit anderen festen und flüssigen Nichtleitern.

Die in dieser Untersuchung benutzte Methode ist nur anwendbar, wenn der feste Stoff von der Flüssigkeit, in die er eintaucht, *nicht* benetzt wird. Neben der chemischen Indifferenz war die Unbenetzbarkeit durch Wasser und wässrige Lösungen bestimend für die Wahl des Paraffins als fester Substanz gewesen. Glas, Quarz usw. werden benetzt und zeigen keine Aufladung. Andererseits ist Paraffin ungeeignet für die Untersuchung der Aufladung gegen Flüssigkeiten von anderer Dielektrizitätskonstante als Wasser; Alkohol, Aceton und die meisten anderen in Betracht kommenden Flüssigkeiten benetzen Paraffin. Beim Emporziehen aus ihnen ist auf der Paraffinkugel eine Flüssigkeitshaut deutlich sichtbar.

Es findet demnach keine Trennung der beiden Teile der Doppelschicht und somit auch keine nach außen sich bemerkbar machende Aufladung statt.

Wohl aber ließ sich im Anschluß an die Versuche von A. Coehn und H. Mozer (l. c.) zeigen, daß — wenn die Nichtbenetzbartheit erhalten bleibt — Zusatz von Nichtleitern (Rohrzucker, Harnstoff usw.) zum Wasser dessen Aufladung gegen Paraffin nicht wesentlich ändert. Geht man aber hier zu stark konzentrierten Lösungen über, so zeigt sich ein Phänomen, das als besonders aufklärend über den Mechanismus der Aufladung noch eingehender zu diskutieren sein wird.

Die Paraffinkugel nimmt nämlich beim Emporziehen aus einer dreifach normalen Rohrzuckerlösung eine anscheinend vollkommen benetzende Schicht der Lösung mit. Demgemäß zeigt sich nach dem Emporziehen in das Netz keine Aufladung — auch nicht nach öfterem Eintauchen. Eine eigentliche Benetzung hat aber nicht stattgefunden: Die Flüssigkeit haftet nur — infolge ihrer Zähigkeit — *in sich* zusammenhängend an der Kugel. Läßt man nämlich die Kugel nach dem Emporziehen durch Abstellen des Motors im Netz verweilen, so sieht man nach einigen Sekunden, wie sich die Flüssigkeitsschicht vom oberen Pol der Kugel her langsam in sich selbst aufrollt, bis plötzlich, nach Überschreiten der oberen Kugelhälfte, die ganze Flüssigkeitsmasse von der Kugel sich loslässt, die nun völlig unbenetzt erscheint. Im gleichen Augenblick schnellen die Elektrometerfäden auseinander und zeigen ein negatives, für den Ladungssinn der Flüssigkeit also ein positives Potential in der Größenordnung wie reines Wasser. (Zusatz von Elektrolyten zu der Rohrzuckerlösung setzt wie bei Wasser die Aufladung herab und Wasserstoffionen kehren von bestimmtem Gehalt ab den Ladungssinn der zähen Rohrzuckerlösung um.) Der Vorgang läßt sich beliebig oft wiederholen. Stets geben die Fäden den Ausschlag in dem Augenblick, in dem die Flüssigkeit von der Kugel abfällt. Daß der Vorgang nur von der Zähigkeit der Flüssigkeit abhängt, zeigt sich, wenn man eine Flüssigkeit von anderer chemischer Natur, aber ähnlicher Zähigkeit verwendet: Glyzerin gibt genau das gleiche Phänomen, nur daß dann das Abschälen der Flüssigkeitshaut noch viel langsamer und gleichmäßiger erfolgt als bei der Zuckerlösung.

Man hat hiermit einen drastischen Beweis, daß in den hier zur Untersuchung gelangten Fällen die beiden Teile der Doppelschicht nicht, wie es Lenard (l. c.) für den Wasserfall-effekt wahrscheinlich gemacht hat, beide in der Flüssigkeit liegen, sondern jede Ladung für sich an einem der zwei verschiedenen, in Berührung tretenden Stoffe sich ausbildet.

Zusammenfassung.

1. Um die Aufladung fester Dielektrika auch gegen gut leitende Lösungen ohne die Störungen durch elektrolytische Vorgänge messen zu können, wurde eine elektrostatische Methode angegeben. Es wurde eine Apparatur ausgearbeitet, welche automatisch eine stets gleichmäßige Berührung des festen Dielektrikums mit den zu untersuchenden Flüssigkeiten bewirkt. Für die Aufladung der beiden Stoffe ließen sich damit gut reproduzierbare Werte erhalten. Der Vorgang der zunehmenden Aufladung des festen Dielektrikums bis zu einem *konstant bleibenden Endwert* konnte in automatischer photographischer Registrierung festgelegt werden.

2. Der Einfluß der Elektrolyte auf die Aufladung des festen Dielektrikums entspricht qualitativ dem Einfluß beim Wasserfall-effekt. Die zur Herabsetzung der Ladung erforderlichen Quantitäten an Elektrolyt sind jedoch hier weit größer.

3. Eine Umkehr des Ladungssinnes durch Neutralsalze ist daher nur in solchen Fällen zu erreichen, in welchen die Löslichkeit des Neutralsalzes ausreichend groß ist.

4. Die Überlegenheit des H^+ -Ions in der Fähigkeit, die Ladung herabzusetzen, ist — wie früher beim Wasserfall-effekt — auch hier vorhanden, so daß bei Säuren in allen Fällen eine Umkehr erreicht wurde.

5. Die Sonderstellung der H^+ -Ionen zeigt sich auch darin, daß sie einen ausgeprägten Temperaturkoeffizienten aufweisen in dem Sinne, daß Temperaturerhöhung wie Konzentrationsvermehrung wirkt. Die Temperaturabhängigkeit der Neutralsalze und Alkalien ist entweder nicht vorhanden oder liegt innerhalb der Versuchsfehler.

6. Gelöste Nichtelektrolyte sind in verdünnter Lösung, wie beim Wasserfalleffekt, ohne Einfluß auf die Aufladung.

7. Findet eine Benetzung des festen Dielektrikums durch eine Flüssigkeit statt, so zeigt sich, da beim Herausheben aus der Flüssigkeit keine Trennung der beiden Schichten erfolgt, keine Aufladung.

8. Versuche mit sehr zähen Lösungen erscheinen geeignet, weiteren Aufschluß über den Mechanismus der untersuchten Ladungerscheinungen zu geben.

Göttingen, Juli 1915, Photochemische Abteilung des
Instituts für physikalische Chemie.

(Eingegangen 17. November 1915.)

**2. Bekanntmachung
über die Prüfung von Thermometern.**

Vom 1. April 1916 an eicht die Physikalisch-Technische Reichsanstalt die Thermometer und Pyrometer in einer Temperaturskale, welche in folgender Weise bestimmt ist:

1. In dem Gebiete zwischen dem Schmelzpunkt des Quecksilbers und dem Siedepunkt des Schwefels wird die Temperatur durch das Platinwiderstandsthermometer nach folgenden Normen definiert: Für die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes R von der Temperatur t gilt die quadratische Gleichung

$$R = R_0 (1 + a t - b t^2).$$

Ihre Konstanten werden bestimmt durch die Messung des Widerstandes bei 0° (R_0), bei 100° (R_{100}) und bei dem Schwefelsiedepunkte, welcher bei dem reduzierten Barometerstande p gleich

$$*444,55^\circ + 0,0908(p - 760) - 0,000047(p - 760)^2$$

zu setzen ist. Bezeichnet t_p die Temperatur in der Platin-skale, also

$$t_p = 100 \frac{R - R_0}{R_{100} - R_0},$$

so gilt:

$$t = t_p + \delta \left\{ \left(\frac{t}{100} \right)^2 - \frac{t}{100} \right\},$$

wo

$$\delta = \frac{b \cdot 10^4}{a - b \cdot 10^2}.$$

Das Platin des Widerstandes ist von solcher Reinheit zu wählen, daß R_{100}/R_0 nicht kleiner als 1,388 und δ nicht größer als 1,52 ist.

Die folgenden Fixpunkte sind in dieser Temperaturskale gemessen worden und können zur Eichung von Thermometern benutzt werden:

die Schmelz- oder Erstarrungspunkte von

Quecksilber	- 38,89°,
Zinn	+ 281,84,
* Cadmium	320,9,
Zink	419,4;

der Umwandlungspunkt von

Natriumsulfat	+ 32,38;
-------------------------	----------

die Siedepunkte von

Naphtalin	217,96° + 0,058 (p - 760),
Benzophenon	305,9° + 0,063 (p - 760).

Zwischen 0° und 100° fällt die vorstehend definierte Skale mit der internationalen Wasserstoffskale innerhalb deren Fehlergrenze zusammen.

2. Unterhalb des Schmelzpunktes von Quecksilber werden die Temperaturen definiert durch dasjenige Platinwiderstandsthermometer, das Henning mit dem Wasserstoffthermometer verglichen hat (vgl. Ann. d. Phys. 40. p. 635. 1913 und 43. p. 282. 1914). Als Fixpunkte dienen in diesem Bereich:

die Siedepunkte

von Kohlensäure

$$* - 78,5° + 0,01595 (p - 760) - 0,0000011 (p - 760)^2$$

und von Sauerstoff

$$* - 183,0° + 0,01258 (p - 760) - 0,00000079 (p - 760)^2.$$

3. Oberhalb des Schwefelsiedepunktes dienen als Fixpunkte die Schmelzpunkte von

* Antimon	630°
Silber	960,5
* Gold	1063
Kupfer	1083
* Palladium	1557
Platin	1764.

Zur Interpolation zwischen diesen Fixpunkten wird das Thermoelement aus Platin und 10 proz. Platinrhodium verwendet. Die Thermokraft wird zwischen 300° und 1600° durch eine Gleichung dritten Grades dargestellt, deren Konstanten durch die an den Schmelzpunkten des Cadmiums, Antimons,

Goldes und Palladiums bestimmten Werte der Thermokraft abgeleitet werden.

Mit dieser Skale steht innerhalb der Fehlergrenze in Übereinstimmung die radiometrische Skale, in der zwischen zwei Temperaturen t_1 und t_2 und den zugehörigen Helligkeiten H_1 und H_2 der homogenen schwarzen Strahlung von der Wellenlänge λ (μ) die Beziehung besteht

$$(1) \quad \log \text{nat} \frac{H_2}{H_1} = \frac{c}{\lambda} \left\{ \frac{1}{273 + t_1} - \frac{1}{273 + t_2} \right\},$$

wenn $c = 14300$ gesetzt wird.

Erläuterungen.

1. Die definierte Temperaturskale entspricht nach dem heutigen Stande der Thermometrie der thermodynamischen Skale, ist aber von dieser, deren Verwirklichung sich mit dem wissenschaftlichen Fortschritt etwas ändern kann, zu unterscheiden. Mit der Einführung der neuen Skale wird in der Thermometrie derselbe Weg eingeschlagen, wie in der elektrischen Meßtechnik, wo unterschieden wird zwischen den ursprünglich definierten Werten der Einheiten und ihrer Verwirklichung durch feste international eingeführte Normen.

2. Die Fixpunkte, von denen die für die Definition der Temperaturskale notwendigen mit einem * bezeichnet sind, beruhen unterhalb 1100° auf den übereinstimmenden Ergebnissen der neueren gasthermometrischen Messungen. Die Punkte oberhalb 1100° sind radiometrisch bestimmt und weichen von den Werten ab, die mit dem Gasthermometer ermittelt wurden. So liegt der angegebene Wert 1557° für den Schmelzpunkt des Palladiums, der nach Gleichung (1) bestimmt wurde, unter Annahme des Helligkeitsverhältnisses $H_{\text{Pd Sm}}/H_{\text{Au Sm}}$ für $\lambda = 0,6563 \mu$ zu $81,5$, um 8° höher als die Zahl, welche Day und Sosman mit dem Gasthermometer gefunden haben.

Charlottenburg, den 16. Dezember 1915.

Der Präsident der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt
Warburg.

(Eingegangen 21. Dezember 1915.)

3. *Über die Interferenzerscheinungen am
Michelsonschen Interferometer;
von Georg Krause.*

(Gekürzte Breslauer Dissertation.)

Einleitung.

Das Ziel dieser Arbeit soll sein, das Interferometer von Michelson als Interferenzapparat einer theoretischen Untersuchung zu unterziehen und die Ergebnisse dieser experimentell zu prüfen. Die Anordnung des Apparates zeigt Fig. 1. Das von der Lichtquelle L ausgesandte Licht wird an der halbdurchlässigen versilberten Ebene der planparallelen Platte V teils durchgelassen teils reflektiert. Das durchgelassene Licht wird an dem Spiegel II und das reflektierte Licht an dem Spiegel I reflektiert, so daß beide Bündel nach Reflexion an der halbdurchlässigen Ebene bzw. nach Durchgang durch diese längs VF interferieren. Die so entstehende Interferenzerscheinung wird durch ein Fernrohr bei F beobachtet. Die zu V parallele, planparallele Glasplatte C von gleicher Dicke und gleichem Brechungsexponenten wie V dient zum Ausgleich der Glaswege. An dem Apparat treten zwei Arten von Interferenzerscheinungen auf, je nachdem die Spiegel I und II aufeinander senkrecht stehen und gegen V gleiche Winkel bilden oder nicht.

Im ersten Fall liegt das Optimum der Erscheinung im Unendlichen. Den Spezialfall, daß die Kompensationsplatte C entfernt wird, haben Lummer und Waetzmann eingehend theoretisch und experimentell untersucht.¹⁾ Im letzten Paragraphen der angegebenen Arbeit werden einige für den Fall, daß man zwischen V und I unter beliebigem Winkel eine plan-

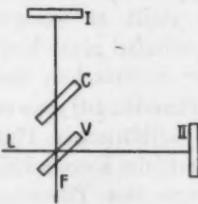


Fig. 1.

1) E. Waetzmann und O. Lummer, Ann. d. Phys. 36. p. 388. 1911.

Annalen der Physik. IV. Folge. 48.

parallele Glasplatte einschaltet, auftretende Erscheinungen beschrieben. Das Ziel des ersten Teiles dieser Arbeit ist, diese Interferenzerscheinungen theoretisch und experimentell eingehend zu verfolgen.

Im zweiten Falle liegt das Optimum der Erscheinung in der Gegend des Spiegels I. Ist die Glasplatte C parallel V , von derselben Dicke und demselben Brechungsexponenten wie V , so hat die hier auftretenden Interferenzerscheinungen Michelson untersucht.¹⁾ Er behandelt den Apparat theoretisch als keilförmige Luftplatte, gebildet von I und dem Spiegelbild von II in bezug auf die versilberte Ebene von V . Da, wie er sagt, die Theorie der Interferenzerscheinungen an keilförmigen Blättchen von Feussner²⁾), nach der nur gerade Linien als Interferenzkurven auftreten können, die an seinem Apparat beobachteten, gekrümmten Kurven nicht erklären kann, so stellt er wenigstens für den ihn allein interessierenden Spezialfall eines kleinen Einfallwinkels unter Vernachlässigung der mehrfachen Reflexion (die ja bei seinem Apparat nicht vorhanden ist) eine eigene Theorie der Interferenzerscheinungen an keilförmigen Platten auf, wonach je nach den Umständen sämtliche Kegelschnitte als Interferenzkurven auftreten können. Gegen diese Theorie erhebt Feussner zwei Einwände.³⁾ Erstens hält er es nicht für zulässig, wie Michelson zur Vereinfachung der Rechnung tut, die Lichtquelle als mit der Vorderfläche des Blättchens zusammenfallend anzunehmen. Zweitens führt er die von seiner Theorie abweichenden Resultate der Michelsonschen Theorie zurück auf die Vernachlässigungen in dem Ausdruck für den Gangunterschied zusammengehöriger Strahlen. Er erklärt, daß an einem Luftkeil bei Aufstellung eines strengen Ausdrucks für den Gangunterschied die Theorie nur gerade Linien ergeben kann (im Spezialfall der planparallelen Platte Kreise). Es erschien daher geboten, im zweiten Teil dieser Arbeit die Interferenzerscheinungen an einem Luftkeil unter Vernachlässigung der mehrfachen Reflexion im Spezialfall eines kleinen Einfallwinkels unter Vermeidung der angegebenen Ver-

1) A. Michelson, Phil. Mag. (5) 13. p. 236. 1882.

2) W. Feussner, Wied. Ann. 14. p. 545. 1881.

3) A. Winkelmann, Handbuch der Physik, Optik II, p. 992. 1903.

nachlässignngen von Michelson in möglichster Strenge theoretisch abzuleiten und die Ergebnisse mit der Erfahrung zu vergleichen.

I. Teil:

Die Interferenzerscheinungen im Unendlichen.

1. Theorie.

Es werde die Anordnung der Fig. 2 vorausgesetzt: die Spiegel I und II stehen senkrecht aufeinander und bilden gegen die halbdurchlässig versilberte, planparallele Platte V von der

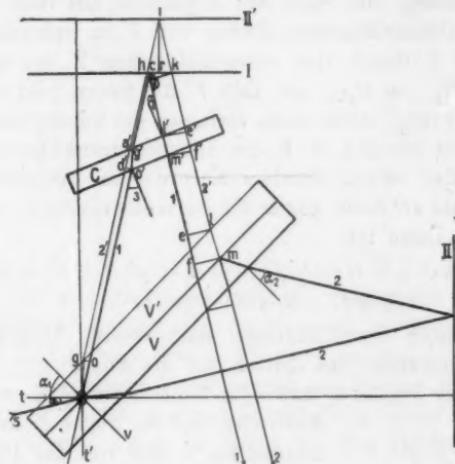


Fig. 2.

Dicke d und dem Brechungsexponenten n gleiche Winkel. Zwischen V und dem Spiegel I ist unter dem beliebigen Winkel φ_1 gegen I die planparallele Glasplatte C von der Dicke d_1 und dem Brechungsexponenten n , eingeschoben. Die Spiegel I und II und die Platten V und C sollen senkrecht auf der Horizontal-ebene, die als Zeichenebene gewählt ist, stehen. Die Spiegel I und II haben von dem Punkt O der halbdurchlässigen Ebene von V die Entferungen D_1 bzw. D_2 , und es sei $D_1 - D_2 = D$. In der Fig. 2 ist der von der Lichtquelle ausgesandte Strahl sO speziell als in der Zeichenebene verlaufend angenommen. Die

folgende Berechnung bezieht sich aber ganz allgemein auf einen Strahl, der in einer beliebigen Ebene im Raum unter dem beliebigen Einfallswinkel α_1 gegen die Normale auf V auftrifft und sich hier in die beiden kohärenten Strahlen 1 und 2 teilt. Dadurch wird zugleich die Theorie von Lummer und Waetzmann (a. a. O.) ergänzt, die in ihrem hier als Spezialfall enthaltenen Fall die Berechnung des Gangunterschiedes nur für einen in der Horizontalebene verlaufenden Strahl durchgeführt haben. Zur Berechnung der Gangunterschiedes G_{2-1} der beiden Strahlen 1 und 2 erweist es sich als zweckmäßig, die Seite des Apparates mit dem Spiegel II an der halbdurchlässigen Ebene von V zu spiegeln, so daß der Strahl 2 durch den spiegelbildlichen $2'$ ersetzt werden kann und $G_{2-1} = G_{2'-1}$ ist, falls V' das Spiegelbild von V darstellt. Wie man leicht sieht, verlassen die kohärenten Strahlen den Apparat parallel, d. h. die Interferenzerscheinung ist mit auf Unendlich akkomodiertem Fernrohr zu beobachten. Der Einfallsstrahl so bilde gegen die Normalenrichtung von II den Winkel ϵ . Dann ist:

$$G_{2-1} = (n \cdot Oa - Oa) + (O'a' - n_1 \cdot O'g') + (2hi - cb - cp) + (e'f' - n_1 \cdot lm') + (n \cdot lm - ef).$$

Die durch die Klammern dargestellten Beiträge laufen alle mit Ausnahme des dritten auf die Anordnung der Fig. 3 hinaus. Der Strahl 1 mit dem Einfallswinkel α werde beim Auftreffen auf die Platte P vom Berechnungsindex ν und von der Dicke δ gebrochen und seine Ebene werde zur Zeichenebene gemacht. Der nicht in der Zeichenebene verlaufende, zu 1 parallele Strahl 2 gehe ungebrochen durch P . Dann ist der durch P hervorgerufene Gangunterschied G'_{2-1} ,

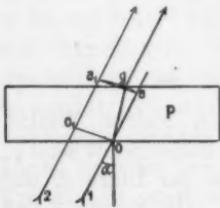


Fig. 3.

$$G'_{2-1} = O_1 a_1 - \nu \cdot Oa,$$

wenn ga_1 und OO_1 die von g und O auf 2 gefällten Senkrechten darstellen. Wird noch von g auf 1 die Senkrechte ga gefällt, so ist $O_1 a_1 = Oa$. Also:

$$G'_{2-1} = Oa - \nu \cdot Oa = \delta \left(\cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 \alpha}} \right) - \frac{\delta \cdot \nu^2}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Besonders zu behandeln ist nur noch die dritte Klammer.

Es schneide nach Fig. 4 die Ebene der Strahlen 1 und 2' die Ebene von I in die Geraden hc . Strahl 1 werde an I bei c reflektiert in Richtung cs_1 , Strahl 2 an II' bei i in Richtung is_2 . Die beiden parallelen Strahlen treffen unter demselben Einfallswinkel ε auf die parallelen Ebenen I und II' auf, sind also nach der Reflexion wieder parallel. Die Ebene des Strahles 2' schneide I in der Geraden hk . Fällt man von k auf die zu hk durch c gezogene Parallele cl die

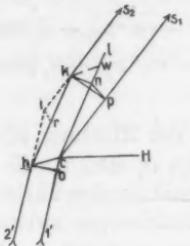


Fig. 4.

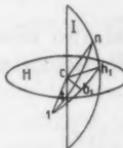


Fig. 5.

Senkrechte ku und von k auf cs_1 die Senkrechte kp , so ist auch up senkrecht auf cs_1 ; also: $cp = cu \cdot \sin \varepsilon = (cw - uw) \sin \varepsilon$. Sei $kw \parallel hc$ und Winkel $kwu = hkc = \zeta$, so ist $uw = kw \cdot \cos \zeta = hc \cdot \cos \zeta$. Sei ferner hb senkrecht auf lc und Winkel $chb = \eta$, so $cb = hc \cdot \sin \eta$. Zur Aufstellung einer Beziehung zwischen η , ζ und ε sei in Figur 5: H = Horizontalebene, I = die Ebene des Spiegels I. Die Ebene der Strahlen 1 und 2' treffe I längs ch_1 , und in ihr werde zu hb durch c die Parallele cb_1 gezogen, so daß Winkel $h_1cb_1 = \eta$ ist. Sonst stimmt die Bezeichnung mit der in Fig. 4 überein; es ist also $\cancel{\neq} 1 \ ct = \varepsilon$ und $\cancel{\neq} uch_1 = \zeta$: Schlägt man dann um c als Zentrum eine Kugel, so folgt aus dem bei u rechtwinkligen sphärischen Dreieck $1 \ uh_1 \cdot \sin \eta = \sin \varepsilon \cdot \cos \zeta$.

Also: $cp + cb = cw \cdot \sin \varepsilon = 2hi \cdot \sin^2 \varepsilon$.

$$\text{Und: } 2hi - (cb + cp) = 2hi \cos^2 \varepsilon = 2D \cos \varepsilon.$$

Trifft also Strahl 1 auf die Platte C unter dem Einfallswinkel α_3 vor der Reflexion an I und nach dieser unter dem Einfallsinkel α_4 , und trifft Strahl 2 nach der Reflexion an II auf V unter dem Einfallsinkel α_5 , so ist:

$$\begin{aligned}
 G_{2-1} = & \left[\frac{d \cdot n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}} - d \left(\cos \alpha_1 + \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}} \right) \right] \\
 & + \left[-\frac{d_1 \cdot n_1^2}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \alpha_3}} + d_1 \left(\cos \alpha_3 + \frac{\sin^2 \alpha_3}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \alpha_3}} \right) \right] + 2D \cos \varepsilon \\
 & + \left[-\frac{d_1 n_1^2}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \alpha_4}} + d_1 \left(\cos \alpha_4 + \frac{\sin^2 \alpha_4}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \alpha_4}} \right) \right] \\
 & + \left[\frac{d \cdot n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_2}} - d \left(\cos \alpha_2 + \frac{\sin^2 \alpha_2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_2}} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Oder umgeformt:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} G_{2-1} = d(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_2}) - d(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \\ - d_1(\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \alpha_3} + \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \alpha_4}) + d_1(\cos \alpha_3 + \cos \alpha_4) \\ + 2D \cos \varepsilon. \end{array} \right.$$

G_{2-1} ist also eine Funktion der Richtung allein, nämlich der Winkelkoordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ und ε , die aber nicht alle unabhängige Variable sind. Um

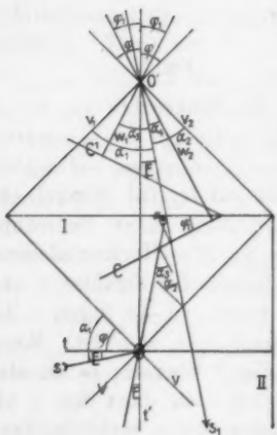


Fig. 6.

den Winkel α_4 ; er verlasse schließlich den Apparat in der Richtung is_1 und bilde dabei gegen die Normale von V den Winkel α_2 . Die Normale von C bilde gegen die Normale tO

1) Ketteler, Farbenzerstreuung der Gase, Bonn 1865.

2) O. Lummer, Wied. Ann. 24. p. 417. 1885.

von I den Winkel φ_1 . Denkt man sich nun die ganze Anordnung an der Ebene I gespiegelt, durch den zu O entsprechenden Punkt O' die Normalenrichtungen von C und C' gezogen und schließlich um O' als Zentrum eine Kugel mit dem Radius 1 geschlagen, so kommt die Fig. 7 zustande. Es stelle H wieder die Horizontalebene vor, dann ist: $t' O' =$ Normalenrichtung von $I =$ Richtung der optischen Achse des Fernrohrs, $\not s_1 O' v' = \alpha_1$, $\not s_1 O' v_2 = \alpha_2$, $\not s_1 O' w_1 = \alpha_3$, $\not s_1 O' w_2 = \alpha_4$, $\not s_1 O' t' = \varepsilon$, $\not v_1 O' t = \not v_2 O' t = \varphi = 45^\circ$ und $\not w_2 O' t' = w_3 O' t' = \varphi_1$. Sei schließlich $\not v_1 t' s_1 = \delta$, so folgen aus den sphärischen Dreiecken die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \cos \alpha_{1,2} = \cos \varepsilon \cdot \cos \varphi \pm \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi \cdot \cos \delta \\ \cos \alpha_{3,4} = \cos \varepsilon \cdot \cos \varphi_1 \pm \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \delta \end{cases}$$



Fig. 7.

Diese Transformationsgleichungen (2) auf Gleichung (1) angewandt liefern G_{2-1} als Funktion der beiden sphärischen Polarkoordinaten ε und δ ; und die Gleichung $G_{2-1}(\varepsilon, \delta) = \text{const.}$ bedeutet die Gleichung der Interferenzkurven auf der Kugel.

Bei der Beobachtung ist ε stets ein kleiner Winkel; es erweist sich daher als nicht nötig, diese strenge Gleichung der Interferenzkurven zu diskutieren. Vielmehr genügt es praktisch, wie sich zeigen wird, G_{2-1} in eine konvergente Potenzreihe nach ε zu entwickeln und diese bei der zweiten Potenz abzubrechen. Zu dem Zwecke setze ich $u = \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}$ und erhalte, da $u < 1$, als Vertreter der 4 Wurzeln in Gleichung (1) die absolut konvergente Reihe:

$$(3) \quad \sqrt{1-u} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right) \frac{[\sin^2 \alpha]^r}{n^{2r}}$$

Nach Gleichung (2) ist nun: $\sin^2 \alpha = c + b \cdot \sin \varepsilon$, wenn ich setze:

$$c = \sin^2 \varphi \quad \text{und} \quad b = \sin \varepsilon \cdot (\cos^2 \varphi - \cos^2 \delta \cdot \sin^2 \varphi) \\ \pm \cos \varepsilon \cdot \cos \delta \cdot \sin 2 \varphi.$$

Und für jedes ganzzahlige r besteht die Entwicklung:

$$(4) \quad [\sin^2 \alpha]^r = \sum_{k=0}^r \left(\frac{r}{k}\right) c^{r-k} \cdot (b \cdot \sin \varepsilon)^k.$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (4) wird (3):

$$\sqrt{1-u} = \sum_{r=0}^{\infty} \left[(-1)^r \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{n^{2r}} \sum_{k=0}^r \left(\frac{r}{k}\right) c^{r-k} \cdot (b \sin \varepsilon)^k \right].$$

Und da die Reihen absolut konvergent sind, so ist auch:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-u} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(b \sin \varepsilon)^k \sum_{r=k}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{r}{k}\right) c^{r-k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(b \sin \varepsilon)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dc^k} \left(\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right) \frac{c^r}{n^{2r}} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$(5) \quad \sqrt{1-u} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(b \sin \varepsilon)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dc^k} \left(\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{n^2}} \right) \right].$$

Experimentell ist, wie schon erwähnt, ε ein sehr kleiner Winkel, so daß man $\sin \varepsilon = \varepsilon$ und $\cos \varepsilon = 1 - \varepsilon^2/2$ setzen kann. Bricht man die absolut konvergente Potenzreihe (5) unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung bei der zweiten Potenz ab, so erhält man die Gleichung:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} &= \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - \varepsilon^2 \frac{\cos^2 \varphi}{2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \\ &\quad + \varepsilon^2 \cos^2 \delta \frac{(n^2 - 1) \sin^2 \varphi}{2 (\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi})^3} \pm \varepsilon \cos \delta \cdot \frac{\cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}, \end{aligned} \right.$$

wo das positive Vorzeichen für α_1 und α_3 und das negative für α_2 und α_4 gilt.

Bei Benutzung der Gleichungen (2) und (6) und Vernachlässigung der Glieder von höherer als der zweiten Potenz in ε wird nach Gleichung (1):

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} G_{2-1} &= 2(d \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - d_1 \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \varphi_1} - d \cos \varphi \\ &\quad + d_1 \cos \varphi_1 + D) + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{d_1 \cos^2 \varphi_1}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \varphi_1}} - \frac{d \cos^2 \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \right. \\ &\quad \left. + d \cos \varphi - d_1 \cos \varphi_1 - D \right) + \varepsilon^2 \cdot \cos^2 \delta \cdot \left(\frac{(d(n^2 - 1) \sin^2 \varphi)}{(\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi})^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{d_1(n_1^2 - 1) \sin^2 \varphi_1}{(\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \varphi_1})^3} \right). \end{aligned} \right.$$

Für den Achsenstrahl ist $\varepsilon = 0$, also sein Gangunterschied $(G_{2-1})_{\varepsilon=0}$ ist:

$$(G_{2-1})_{\varepsilon=0} = 2(d \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - d_1 \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \varphi_1} - d \cos \varphi + d_1 \cos \varphi_1 + D).$$

Nun setze ich:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma = G_2 - 1 - (G_2 - 1)_e = 0 \\ b = \frac{d_1 \cos^2 \varphi_1}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \varphi_1}} - \frac{d \cos^2 \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} + d \cos \varphi - d_1 \cos \varphi_1 \\ a = \frac{d(n^2 - 1) \sin^2 \varphi}{(\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi})^3} - \frac{d_1(n_1^2 - 1) \sin^2 \varphi_1}{(\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \varphi_1})^3} \\ \beta = b - D \\ \alpha = \beta + a = a + b - D. \end{array} \right.$$

Und führe ich statt der sphärischen Polarkoordinaten (ε, δ) in der Tangentialebene im Punkt t der Einheitskugel (Fig. 7) mit dem Berührungs punkt als Anfangspunkt die kartesischen Koordination (x, y) (x -Achse = horizontal, y -Achse = vertikal) ein mittels der wegen der Kleinheit von ε zulässigen Transformationsgleichungen:

$$x = \varepsilon \cdot \cos \delta$$

$$y = \varepsilon \cdot \sin \delta,$$

so entsteht aus (7) als Gleichung der Interferenzkurven:

$$(9) \quad \gamma = \alpha x^2 + \beta y^2.$$

Die Interferenzkurven sind also Zentralkegelschnitte, deren Zentrum mit der Mitte des Gesichtsfeldes zusammenfällt. Sind die Konstanten der versilberten Platte $V(n, d)$ und die der Platte $C(n_1, d_1)$ gegeben, so sind die Koeffizienten α und β der Gleichung (9) nur noch Funktionen der beiden Variablen D und φ_1 .

Bei beliebig gegebenem, konstantem φ_1 sind α und β nach Gleichung (8) lineare Funktionen von D . Da das Vorzeichen von γ nach Gleichung (9) durch das von α und β bestimmt ist, so ist demnach Art und Reihenfolge der Interferenzerscheinungen leicht anzugeben, wenn D von $+\infty$ bis $-\infty$ läuft. Die Reihenfolge ist verschieden, je nachdem $\alpha \leq 0$ ist.

Für $\alpha = 0$ stellt (9) für jedes D Kreise vor.

Ist $\alpha > 0$, und nenne ich horizontale bzw. vertikale Ellipsen solche, deren große Achse mit der horizontalen x -Achse bzw. mit der vertikalen y -Achse zusammenfällt, v = das Verhältnis der großen zur kleinen Achse, ebenso horizontale bzw.

vertikale Hyperbeln solche, deren Asymptoten gegen die x -Achse einen Winkel $\vartheta < 45^\circ$ bzw. $\vartheta > 45^\circ$ bilden, so bedeutet Gleichung (9) für:

$D = +\infty$: Kreise.

$+\infty > D > c$: horizontale Ellipsen; v wächst.

$D = c$: horizontale Geraden.

$c > D > b + \frac{a}{2}$: horizontale Doppelhyperbeln; ϑ wächst.

$D = b + \frac{a}{2}$: gleichseitige Doppelhyperbeln.

$b + \frac{a}{2} > D > b$: vertikale Doppelhyperbeln; ϑ wächst.

$D = b$: vertikale Geraden.

$b > D > -\infty$: vertikale Ellipsen; v fällt.

$D = -\infty$: Kreise.

Für $a < 0$ treten, wenn D von $+\infty$ bis $-\infty$ läuft, dieselben Kurven nur in umgekehrter Reihenfolge auf.

Als Funktion von φ_1 bei konstantem D soll der Verlauf der Erscheinung hier nicht allgemein diskutiert werden, da sich je nach der Größe der Konstanten (φ , D , d , d_1 , n , n_1) eine zu große Anzahl verschiedener Fälle ergibt.

2. Beobachtung.

Ist das Fernrohr auf Unendlich eingestellt, so treten beim Michelsonschen Interferometer außer der beabsichtigten Erscheinung mit dem Strahlengang der Fig. 2 noch andere Interferenzerscheinungen auf. Diese störenden Nebenerscheinungen kann man durch geeignete Anordnung beseitigen (s. Diss.).

Zunächst sollen die Erscheinungen bei konstantem φ_1 als Funktion von D verfolgt werden. Ein Spezialfall der oben entwickelten Theorie ist der Fall $d_1 = 0$, d. h. aus dem Apparat wird die Platte C entfernt; dieser Fall ist von den Herren Prof. Lummer und Waetzmann (a. a. O.) behandelt. Hier ist $a > 0$, und die für diesen Fall (oben) aus (9) abgeleitete Art und Reihenfolge der Kurven bei Variation von D von $+\infty$ bis $-\infty$ stimmt vollkommen überein mit den Beobachtungen in § 2 der angegebenen Arbeit. Übrigens sind die Ellipsen bei $D = \pm 30$ mm praktisch schon nicht mehr von

Kreisen zu unterscheiden. Wird nun in den Apparat eine planparallele Platte von der Dicke d_1 und dem Brechungs-exponenten n_1 unter beliebigem Winkel φ_1 eingesetzt, so treten in Übereinstimmung mit der Theorie bei Variation von D die p. 1046 angegebenen Kurven auf, und zwar entweder in der dort angegebenen Reihenfolge oder in der entgegengesetzten, je nach der Größe von a . Am einfachsten ist diese Folgerung aus der Theorie nachzuprüfen, wenn man $d_1 = d$ und $n_1 = n$ wählt. Dann ist nämlich 1. für $0 \leq \varphi_1 < 45^\circ$: $a > 0$, 2. für $\varphi_1 = 45^\circ$: $a = 0$ und 3. für $45^\circ < \varphi_1 < 90^\circ$: $a < 0$. Die Beobachtung zeigt, daß in Übereinstimmung mit der Entwicklung der p. 1045, 1046 die Reihenfolge der dort angegebenen Kurven für $0 \leq \varphi_1 < 45^\circ$ entgegengesetzt ist der für $45^\circ < \varphi_1 < 90^\circ$. Für $\varphi_1 = 45^\circ$ d. h. $a = 0$ treten bei jedem Werte von D Kreise auf; dies ist der Fall des Michelsonschen Interferometers, in dem der Apparat streng durch eine planparallele Luftplatte ersetzt werden kann. Ist dagegen $n_1 = n$ oder $d_1 = d$, so ist $a = 0$, es treten also auch für $\varphi_1 = 45^\circ$ nur für $D = \pm \infty$ Kreise auf.

Zur quantitativen Nachprüfung muß die Spiegelstellung bekannt sein, für die $D = 0$ ist. Läßt man Spiegel I feststehen und bewegt II parallel zu sich selbst, so sei $A = A_0$ die an einer Skala abgelesene Stellung von II , für die $D = 0$ ist. Da direktes Ausmessen zu ungenaue Werte lieferte, so bestimmte ich die Nullstellung auf folgende Weise: Ich stellte eine planparallele Platte C ($n_1 = n$, $d_1 = d$) parallel der Platte V ($\varphi_1 = 45^\circ$) und bestimmte die Stellung von II , für die die Kreise am breitesten waren. Ist nun C wieder eine beliebige planparallele Platte mit beliebigem Winkel φ_1 , so mögen auftreten:

vertikale Geraden für $A = A_1$
gleichseitige Doppelhyperbeln für $A = A_2$
horizontale Geraden für $A = A_3$.

Dann müssen nach den Entwickelungen auf p. 1046 folgende Beziehungen gelten:

$$(10) \quad A_1 - A_0 = b \quad A_2 - A_1 = \frac{a}{2} \quad A_3 - A_1 = a.$$

Um diese Beziehungen nachzuprüfen, berechnete ich nach (8) die Größen a und b aus den gegebenen Daten (d, n, d_1, n_1) in mehreren Fällen (s. Diss.).

Diese berechneten Werte von a und b stimmten mit den beobachteten linken Seiten der Gleichungen (10) bis auf Bruchteile eines Millimeters überein. Zugleich bestätigte sich in den 3 ersten Fällen, wie auch bei Beobachtung an einer 4 cm dicken Glasplatte die aus der Definitionsgleichung von a zu ziehende Folgerung, daß die Größe a unabhängig ist von dem Vorhandensein irgendeiner Platte C , falls $\varphi_1 = 0$ ist.

Was die Diskussion der Erscheinung als Funktion von φ_1 bei konstantem D anlangt, so zeigen die Definitionsgleichungen von α und β , daß sie nur Funktionen von $\sin^2 \varphi_1$ und $\cos \varphi_1$ sind, daß sie also nur von dem absoluten Wert von φ_1 abhängen. Dies wird durch die Beobachtung bestätigt: Dreht man die Platte C von der Nullage aus im positiven oder negativen Sinne, so verläuft die Erscheinung ganz symmetrisch nach beiden Seiten.

Zur genaueren Nachprüfung berechnete ich für den Fall ($d_1 = d = 9,94$ mm, $n_1 = n = 1,57$) nach (8) die Größen α und β als Funktionen von φ_1 für mehrere Werte von D (s. Diss.).

Art und Reihenfolge der Kurven stimmte vollständig mit der Beobachtung überein.

II. Teil.

Die Interferenzerscheinungen im Endlichen.

1. Theorie.

In diesem Teil sollen, wie in der Einleitung angekündigt ist, die Interferenzerscheinungen an einem Luftkeil mit kleinem Neigungswinkel im Spezialfall eines kleinen Einfallswinkels der auftreffenden Strahlen theoretisch abgeleitet werden. Es mögen also in Fig. 8 die Geraden $K I$ und $K II$ die Spuren eines Luftkeils mit dem kleinen Neigungswinkel α in der die Horizontalebene darstellenden Zeichenebene vorstellen. Die Kante dieses Keils soll senkrecht auf der Zeichenebene stehen. Der Punkt F der ebenen und zur Fläche II im Abstande E parallelen Flammenfläche Φ kann nach einem beliebigen Punkt P im Raume nach Reflexion an den Ebenen I bzw. II nur zwei bestimmte Strahlen senden. Die Punkte F und P

liegen im allgemeinen weder in einer Horizontalebene noch auch in der Zeichenebene. Die Fläche Φ werde an den Ebenen I und II gespiegelt, so daß ihre Spiegelbilder die Ebenen I' bzw. II' mit dem Neigungswinkel γ sind und F' bzw. F'' die Spiegelbilder des Punktes F sind. Haben nun in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem die Punkte P , F' , F'' bzw. die Koordinaten (x, y, z) , (x', y', z') , (x'', y'', z'') , so haben die von F nach P gelangenden kohärenten Strahlen im Punkt P den Gangunterschied:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\ - \sqrt{(x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2}. \end{array} \right.$$

Werde entsprechend Fig. 8 das Koordinatensystem speziell so gelegt, daß die (x, y) -Ebene mit der Ebene II' und die y -Achse mit der Schnittkante der Flächen I' und II' zusammenfällt. Wird von F'' auf FF' die Senkrechte $F''J$ gefällt, so sei $F'J = l$ und $F'J = m$. Dann ist:

$$(12) \quad \begin{cases} x'' = x' + l & y'' = y' \\ z'' = m & z' = 0. \end{cases}$$

Da die Fläche I' symmetrisch liegt zu Φ bezüglich I , so folgt leicht $\gamma = 2\alpha$. Da ferner Winkel $F'FF'' = \alpha$ ist, so folgen aus den Dreiecken JFF'' und $O'F''N$ die Gleichungen:

$$l = (2E - m) \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad m = (x' + l) \operatorname{tg} 2\alpha,$$

aus denen sich die Gleichungen ergeben:

$$(13) \quad m = a x' + b \quad \text{und} \quad x' + l = c x' + d,$$

wenn ich setze:

$$(14) \quad a = \sin 2\alpha \quad b = 4E \sin^2 \alpha \quad c = \cos 2\alpha \quad d = 2E \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos 2\alpha.$$

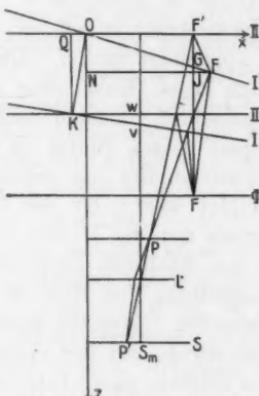


Fig. 8.

Nach den Gleichungen (12) und (13) wird aus (11):

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} G = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} \\ \quad - \sqrt{(c - cx' - d)^2 + (y - y')^2 + (z - ax' - b)^2}. \end{array} \right.$$

Für das Folgende ist es von wesentlicher Bedeutung, ob das beobachtende optische System einen kleinen oder einen hinreichend großen Öffnungswinkel hat. Darauf beruht nämlich der maßgebende Unterschied der Theorien von Michelson und Feussner. Im folgenden wird, wie bei Michelson (l. c.), L als eine Linse mit kleiner Eintrittspupille im Abstande p von der (x, y) -Ebene vorausgesetzt. Die optische Achse der Linse befindet sich in der (x, z) -Ebene und zwar parallel zur z -Achse im Abstande n . S sei ein Schirm senkrecht zur optischen Achse in solcher Entfernung von der Linse, daß P in P' abgebildet werde. [Das System (L, S) kann z. B. auch das Auge eines Beobachters sein.] Dann können nur die durch P gehenden Strahlen nach P' gelangen, welche in dem Kegel liegen, dessen Spitze in P ist und dessen Basis durch die Eintrittspupille (im einfachsten Fall durch den Linsenrand) gebildet wird. Ist der Öffnungswinkel hinreichend klein, so können nur die Punkte von II' nach P' Strahlen senden, die in der nächsten Umgebung des Punktes F' liegen, der den Hauptstrahl des Büschels der nach P' gelangenden Strahlen aussendet. Zugleich ergibt sich, daß $\not\prec \alpha$ und $\not\prec w$, den der Hauptstrahl mit der optischen Achse bildet, hinreichend klein sein müssen, damit Interferenz stattfinden kann; denn andernfalls können zwar Punkte von II' in der nächsten Umgebung von F' Strahlen nach P' senden, nicht aber die zu ihnen gehörenden Punkte von I' , da sie dann ganz außerhalb des eben beschriebenen Kegels liegen. Sind diese Forderungen erfüllt, so kann auf dem Schirm S auch nur dann eine Interferenzerscheinung zustande kommen, wenn alle nach einem Punkt P' des Schirmes gelangenden Paare von kohärenten Strahlen nahezu denselben Gangunterschied haben. Und da bei der vorausgesetzten Kleinheit des Öffnungswinkels, wie gezeigt, nur ein Flächenelement um F' wirksame Strahlen aussenden kann, so ist obige Forderung erfüllt unter der Bedingung, daß stets das totale Differential des Gangunterschiedes G als Funktion

von x' und y' betrachtet gleich Null oder wenigstens hinreichend klein ist, d. h. es muß sein:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G}{\partial x'} = \frac{c(x - cx' - d) + a(z - ax' - b)}{\sqrt{(x - cx' - d)^2 + (y - y')^2 + (z - ax' - b)^2}} \\ \quad - \frac{(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y'} = \frac{(y - y')}{\sqrt{(x - cx' - d)^2 + (y - y')^2 + (z - ax' - b)^2}} \\ \quad - \frac{(y - y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}} = 0. \end{array} \right.$$

Praktisch ist der Winkel w stets klein. Es genügt daher, daß die Bedingungen (16) für die Strahlenpaare erfüllt werden, die nach dem Schnittpunkt S_m der optischen Achse mit dem Schirm S gelangen. Wegen der Stetigkeit der Funktionen $\partial G/\partial x'$ und $\partial G/\partial y'$, sind sie dann auch für die anderen Punkte des Schirmes in der Umgebung von S_m genügend klein. Sei also G_m der Gangunterschied des Strahlenpaars, das von dem Schnittpunkt von Φ mit der optischen Achse nach dem Punkt S_m gelangt, so daß hier $x = x' = n$ und $y = y' = 0$ ist. Dann ist für dieses Strahlenpaar: $x - cx' - d = n(l - c) - d = 0$; denn sonst wäre $n = 2E \cot \alpha$, d. h. die optische Achse trifft die Schnittkante von Φ und I , was praktisch ausgeschlossen ist. Da außerdem, wie oben gezeigt, stets $z = 0$ ist, so ist stets: $\partial G_m/\partial y' = 0$. Für die Mitte des Gesichtsfeldes ist also die zweite der Bedingungen (16) stets erfüllt. Dagegen ist für sie die erste Bedingung $\partial G/\partial x' = 0$ nur erfüllt unter der Voraussetzung:

$$c[n(1 - c) - d] + a[z - an - b] = 0$$

d. h. nach (14):

$$(17) \quad z = n \cdot \operatorname{tg} \alpha + E \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Fällt man von K auf II' die Senkrechte KQ , so ist Winkel $QKO = \alpha$; also folgt aus Dreieck QKO : $n_0 = -E \cdot \operatorname{tg} \alpha$, wenn ich setze $OQ = n_0$. Schneidet die optische Achse die Flächen I und II in V bz. W , so sei $D = VW$. Dann folgt aus Dreieck VKW :

$$D = (n - n_0) \cdot \operatorname{tg} \alpha; \text{ also ist nach (17):}$$

$$(18) \quad z = E + D.$$

Die Bedingungen (16) für das Zustandekommen einer Interferenzerscheinung fordern also, daß man den optischen Apparat auf die vordere Keilfläche I einstellt.

Stelle ich demnach den Schirm S in solche Entfernung zur Linse, daß der Punkt V in den Punkt S_m abgebildet wird, so haben alle nach einem Punkt P' von S gelangenden Strahlenpaare nahezu denselben Gangunterschied, nämlich den des Hauptstrahles des jeweiligen Büschels. Für ihn gelten aber nach Fig. 8 die Gleichungen:

$$\frac{x' - n}{x - n} = \frac{p}{p - z} \quad \text{und} \quad \frac{y'}{y} = \frac{p}{p - z}.$$

Also:

$$(19) \quad x' = \frac{p(x - n)}{p - z} + n \quad \text{und} \quad y' = \frac{p y}{p - z}.$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (19) und (15) lautet also die Gleichung der Interferenzkurve in der betrachteten Ebene $z = \text{const.}$ entsprechend (18): $G|_{z=\text{const.}} = \text{const.}$

Oder ausgeführt:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x - n)^2 \cdot \left(1 - \frac{p}{p - z}\right)^2 + y^2 \left(1 - \frac{p}{p - z}\right)^2 + z^2} \\ & - \sqrt{\left[(x - n) \left(1 - \frac{c p}{p - z}\right) + n(1 - c) - d\right]^2 + y^2 \left(1 - \frac{p}{p - z}\right)^2} \\ & + \left[z - a n - b - \frac{(x - n) a p}{p - z}\right]^2 = C. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Interferenzkurven ist hiermit dargestellt in kartesischen Koordinaten (x, y) in der Ebene $z = \text{const.}$ mit dem Schnittpunkt der z -Achse mit dieser Ebene als Anfangspunkt.

Mache ich den Schnittpunkt der optischen Achse mit der Ebene $z = \text{const.}$ (d. h. bei subjektiver Beobachtung die Mitte des Gesichtsfeldes) zum Koordinatenanfang durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems mittels der Gleichungen:

$$u = x - n \quad v = y,$$

und setze ich:

$$(20) \quad \varepsilon = d - n(1 - c); \quad \zeta = z - a n - a b; \quad \delta = p - c p - z,$$

so lautet die Gleichung der Interferenzkurven:

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} z \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{(p-z)^2} + 1} \\ - \sqrt{\left[\frac{u}{p-z} \delta - \varepsilon \right]^2 + \frac{v^2}{(p-z)^2} \cdot z^2 + \left[\zeta - \frac{u}{p-z} a p \right]^2} = C. \end{array} \right.$$

Durch Entfernung der Wurzeln bekommt man also im allgemeinen streng als Interferenzkurve eine Kurve 4. Grades von der Form:

$$A u^4 + B u^3 + \Gamma u^2 + E u + H v^2 + \Theta = 0,$$

wonach die Kurve also symmetrisch zur u -Achse, dagegen unsymmetrisch zur v -Achse liegt.

Daß die Kurven im allgemeinen gekrümmmt sein müssen, zeigt schon die geometrische Anschauung nach Fig. 8. Betrachtet man nämlich die Strahlenbüschel, deren Hauptstrahlen ein konstantes x' aber wachsendes y' haben, die also eine zur Keilkante parallele, gerade Linie beschreiben, so nimmt ihr Gangunterschied mit wachsendem y' offenbar ab.

Transformiere ich die Gleichung (21) von den kartesischen Koordinaten (u, v) auf Polarkoordinaten (r, φ) in der Ebene $z = \text{const.}$ mittels der Gleichungen:

$$u = r \cdot \cos \varphi \quad v = r \cdot \sin \varphi,$$

und setze ich: $\operatorname{tg} w = r/p - z$, wo w die oben angegebene Bedeutung hat, so wird aus Gleichung (21):

$$z \sqrt{\operatorname{tg}^2 w + 1} - \sqrt{[\operatorname{tg} w \cdot \cos \varphi \cdot \delta - \varepsilon]^2 + \operatorname{tg}^2 w \cdot \sin^2 \varphi \cdot z^2 + [\zeta - \operatorname{tg} w \cdot \cos \varphi \cdot a p]^2} = C.$$

Nachdem nun die Existenz gekrümmter Kurven streng nachgewiesen ist, ist es zur Feststellung der Art der Kurven nicht mehr nötig, diese strenge Gleichung zu behandeln, da der Winkel w praktisch stets klein ist, so daß man näherungsweise $\sin w = \operatorname{tg} w = w$ und $\cos w = 1 - w^2/2$ setzen kann. Mit dieser Vernachlässigung entsteht nach Rücktransformierung auf kartesische Koordinaten die Gleichung:

$$(22) \quad u^2 A + v^2 B + 2 u \Gamma + E = 0,$$

wenn ich setze:

$$(23) \quad \begin{cases} A = \delta^2 + a^2 p^2 - \varepsilon^2 - \zeta^2 + C^2 - Cz \\ B = z^2 - \varepsilon^2 - \zeta^2 + C^2 - Cz \\ \Gamma = (p - z) \cdot (\varepsilon \delta + \zeta a p) \\ E = (p - z)^2 (\varepsilon^2 + \zeta^2 - C^2 + 2 Cz - z^2). \end{cases}$$

Die Gleichung (22) zeigt, daß die eine Hauptachse des durch sie dargestellten Kegelschnittes mit der u -Achse zusammenfällt, während die andere der v -Achse parallel ist.

Für die Mitte des Gesichtsfeldes, d. h. für den Punkt $u = v = 0$, also auch für eine Kurve durch diesen Punkt, ist der Gangunterschied nach Gleichung (21):

$$G_0 = z - \sqrt{\varepsilon^2 + \zeta^2} = C_0.$$

Und bezeichne ich analog die Koeffizienten für diese Kurve mit dem Index Null, so ist $E_0 = 0$. Die Gleichung für die Interferenzkurve durch die Mitte des Gesichtsfeldes lautet also:

$$(24) \quad u^2 A_0 + v^2 B_0 + 2 u \Gamma_0 = 0.$$

Die anderen gleichzeitig im Gesichtsfelde befindlichen Kurven haben nahezu dieselben Koeffizienten, sie sind also von derselben Form wie die durch die Mitte (wie auch die Beobachtung zeigt).

Falls $A_0 = 0$ ist, so setze ich:

$$u_1 = u + \frac{\Gamma_0}{A_0} \quad \text{und} \quad v_1 = v,$$

d. h. ich verschiebe das Koordinatensystem parallel zu sich um die Strecke $u_0 = \Gamma_0/A_0$. Dann lautet die Gleichung der Interferenzkurven bezogen auf das neue Koordinatensystem (u_1, v_1) :

$$(25) \quad \frac{u_1^2}{\left(\frac{\Gamma_0}{A_0}\right)^2} + \frac{v_1^2}{\frac{A_0}{B_0} \cdot \left(\frac{\Gamma_0}{A_0}\right)^2} = 1,$$

d. h. die Hauptachsen des durch (25) dargestellten Kegelschnittes fallen zusammen mit den Koordinatenachsen des Systems (u_1, v_1) :

Nach den Gleichungen (23), (20) und (14) ist:

$$(26) \quad \begin{cases} F^2 = \frac{A_0}{B_0} = 1 + \frac{2 p (p - z)}{z (z - E)} \cdot \sin^2 \alpha \\ u_0 = \frac{\Gamma_0}{A_0} = - \frac{(p - z)^2 \cdot (2 E - z) \cdot \sin 2 \alpha}{2 (z - E) \cdot z + 4 p \cdot (p - z) \cdot \sin^2 \alpha}. \end{cases}$$

Dabei bedeutet V das Achsenverhältnis des durch (25) dargestellten Kegelschnittes und u_0 den Abstand des Anfangspunktes des Systems (u_1, v_1) , von dem des Systems (u, v) , d. h. von der Mitte des Gesichtsfeldes.

Für die Diskussion der erhaltenen Gleichungen sind nun je nach der Größe von p 2 Fälle zu unterscheiden:

1. In dem zunächst zu behandelnden ersten Fall sei vorausgesetzt, daß p einen nicht zu großen Wert habe.

Verschiebt man die optische Achse parallel zu sich in der (x, z) -Ebene (beim Interferometer kommt die Parallelverschiebung des einen Spiegels auf dasselbe hinaus), so variiert die Keildicke D und damit nach Gleichung (18) die Größe z , die praktisch, wie sich später ergeben wird, stets in der nächsten Umgebung des Wertes $z = E$ verbleibt. Dann liefert die Diskussion von V^2 und u_0 als Funktionen von z (vgl. Dissertation) und die Gleichungen (24) und (25) folgende Resultate:

Für $E < z < 2E$ bedeutet (25) eine Ellipse, deren große Achse parallel zur v -Achse und deren Zentrum auf der positiven u -Achse liegt. Mit wachsendem z nimmt das Achsenverhältnis V beständig ab und ebenso die Entfernung u_0 des Zentrums der Ellipse von der Mitte des Gesichtsfeldes. In der Nähe von $z = E$ müssen bei der Begrenztheit des Gesichtsfeldes die Ellipsenstücke noch als Geraden erscheinen.

Für $z = E$ (d. h. die optische Achse trifft die Keilkante) ist die Interferenzkurve durch die Mitte des Gesichtsfeldes eine mit der v -Achse zusammenfallende Gerade.

Für $z_1 < z < E$ bedeutet (25) eine Hyperbel, deren Zentrum in großer Entfernung auf der positiven u -Achse liegt und deren Hauptachse mit der u -Achse zusammenfällt. Fällt z von E bis z_1 , so fällt das Achsenverhältnis dem absoluten Betrage nach beständig, und die Entfernung des Zentrums von der Mitte des Gesichtsfeldes wächst von $(p - E)E/2p \cdot \cot \alpha$ bis ∞ , d. h. die Hyperbeln werden bei der Kleinheit von α und der Begrenztheit des Gesichtsfeldes als gerade Linien erscheinen.

Für $z = z_1$ bedeutet (24) eine Parabel mit der u -Achse als Symmetrieachse; sie ist gegen die v -Achse konvex.

Für $z_1 < z < z_2$ bedeutet (25) eine Ellipse, deren große Achse mit der u -Achse zusammenfällt und deren Zentrum auf

der negativen u -Achse liegt. Fällt z von z_1 bis zu dem Werte von z , an dem u_0 sein Minimum erreicht, so steigt V von 0 bis nahezu 1; und die Entfernung u_0 des Zentrums von der Mitte des Gesichtsfeldes fällt von ∞ bis nahezu 0, d. h. die Ellipse krümmt sich immer mehr, wird immer ähnlicher einem Kreise, und ihr Zentrum rückt schließlich in die Mitte des Gesichtsfeldes.

Für kleinere Werte von z ist praktisch nichts mehr zu sehen, weshalb sie hier auch nicht diskutiert werden sollen.

2. Im zweiten Fall, wo p als hinreichend groß angenommen wird, ergeben die Gleichungen (26) folgende Resultate:

Für $E < z < 2E$:

Mit wachsendem p bei konstantem z nimmt das Achsenverhältnis V der Ellipse zu und ebenso die Entfernung u_0 des Zentrums von der Mitte des Gesichtsfeldes, d. h. die Ellipse streckt sich. Für $p = \infty$ wird schließlich $V = \infty$ und $u = -(E - z/2) \cot \alpha$, d. h. die Ellipse geht in eine Gerade über.

Für $0 < z < E$:

Für einen hinreichend großen Wert von p treten in diesem Intervall nur Hyperbeln auf. Ihr Achsenverhältnis V nimmt dem absoluten Betrage nach mit wachsendem p bei konstantem z beständig zu und ebenso die Entfernung u_0 ihres Zentrums von der Mitte des Gesichtsfeldes, d. h. die Hyperbeln strecken sich. Für $p = \infty$ wird schließlich:

$$V^2 = -\infty \text{ und } u^0 = -(E - z/2) \cot \alpha,$$

d. h. die Hyperbeln gehen in Geraden über.

Schließlich ist bezüglich der Ersetzbarkeit des Michelsonschen Interferometers durch einen Luftkeil also der Anwendbarkeit der hier entwickelten Theorie auf dieses noch zu bemerken:

Nur wenn die beiden kohärenten Strahlen aus einem Strahl durch Spaltung an der halbdurchlässigen Ebene von V (Fig. 1) entstehen, d. h., wenn die Interferenzerscheinung in der Gegend des Spiegels I liegt (was nach der Beobachtung der Fall ist), ist der Strahlengang genau so wie bei einem Luftkeil, der von Spiegel I und dem Spiegelbild von II an der halbdurchlässigen Ebene gebildet wird und der durch eine

gegen die Augenachse unter einem Winkel von 45° schräg gestellte planparallele Glasplatte von der Dicke $2d$ betrachtet wird (wenn d die Dicke der versilberten Platte und der Kompen-sationsplatte ist).

2. Beobachtung.

Zur experimentellen Prüfung der eben entwickelten Theorie wurde der Spiegel I (Fig. 1) an der Achse eines Spekrometers so befestigt, daß er um eine vertikale Achse um einen beliebigen, mittels eines Mikroskopes bestimmmbaren Winkel gedreht werden konnte. Nullstellung von I ist die, in der im unendlichen Kreise zu sehen sind. Der Spiegel II konnte wie im ersten Teil dieser Arbeit parallel zu sich um ein beliebiges, an einer Skala ablesbares Stück verschoben werden. Die Lichtquelle (Quecksilberlampe) bildete eine ausgedehnte Fläche. Beobachtet wurde entweder mit bloßem Auge, oder es wurde bei F die Erscheinung mittels einer Linse auf einer Mattglas-scheibe hervorgebracht. Die letztere Anordnung ergibt, daß alle folgenden Erscheinungen in der Gegend des Spiegels I liegen. Der Ort der Erscheinung ist aber keineswegs scharf bestimmbar, vielmehr ist die Erscheinung in einem relativ großen Raum zu beiden Seiten von I mit gleicher Deutlichkeit zu sehen, was auch nach obiger Theorie zu erwarten ist; das totale Differential braucht nämlich nur hinreichend klein zu sein, nicht streng Null. Um nun den Einfluß des Öffnungs-winkels auf die Art der Interferenzerscheinung sicher feststellen zu können, brachte ich dicht vor die Linse als Öffnungs-blende eine Irisblende an. Es zeigt sich, daß bei hinreichend großem Öffnungswinkel in Übereinstimmung mit der Theorie von Feussner, die unter dieser Voraussetzung entwickelt ist, bei beliebiger Stellung von II nur gerade Linien parallel zur Keilkante zu sehen sind. Dies tritt schon bei einem Durchmesser von 8 mm der Eintrittspupille (die hier mit der Öffnungsblende identisch ist) ein, wobei die Entfernung der Linse von I 17 cm und die Entfernung der Flamme 84 cm war. Wird dagegen der Durchmesser der Eintrittspupille bis auf 4 mm verkleinert, so sieht man bei Variation der Stellung von II bei konstantem Keilwinkel zunächst Geraden parallel zur Keilkante, die sich immer mehr krümmen, bis schließlich im Gesichtsfeld voll-

ständig geschlossene, exzentrisch gelegene Kreise zu sehen sind, deren Zentrum der Mitte des Gesichtsfeldes immer näher rückt und endlich mit ihr zusammenfällt. Bei Verschiebung von II nach der entgegengesetzten Seite krümmen sich die Geraden nach der andern Seite, während sonst alles analog verläuft. Läßt man bei konstanter Stellung von II und konstantem Keilwinkel die Entfernung der Linse vom Keil wachsen, so strecken sich in jedem Falle in Übereinstimmung mit meiner Theorie (p. 1055, 1056) die Kurven und gehen bei hinreichender Größe der Entfernung stets in Geraden parallel zur Keilkante über. Sind Geraden im Gesichtsfeld, so werden sie bei Vergrößerung der Eintrittspupille nur etwas undeutlicher, bleiben aber im ganzen Gesichtsfeld sichtbar; dagegen die gekrümmten Kurven verschwinden bei hinreichender Vergrößerung der Eintrittspupille vollständig bis auf schwache Reste von Streifen in der Mitte des Gesichtsfeldes.

Zur genaueren Nachprüfung berechne ich das Quadrat des Achsenverhältnisses V^2 und die Entfernung u_0 des Zentrums von der Mitte des Gesichtsfeldes für verschiedene Werte der Keildicke D im Treppunkt der optischen Achse nach den Gleichungen (26) und (18) in folgenden Fällen:

$\alpha = 2'$			$\alpha = 20''$		
D	V^2	u_0	D	V^2	u_0
-5 cm	0,9,5	+1,02 cm	-0,1 cm	0,9,0	+9,39 cm
-0,1 "	0,9,7	+49,10 "	+0,1 "	1,0,1	-9,37 "
+0,1 "	1,0,3	-48,76 "	+0,5 "	1,0,2	-1,87 "
+5 "	1,0,5	-0,94 "	+15,0 "	1,0,6	-0,05 "

Diese Tabellen stimmen mit der Beobachtung überein und zeigen zugleich: Sobald man bei Variation von D nach beiden Seiten hin an den Kurven eine Krümmung wahrnehmen kann, sind sie Stücke von Kreisen (praktisch). Die für ein $|D|$ innerhalb dieser Grenzen theoretisch berechneten Ellipsen nach der einen Seite und Hyperbeln und Ellipsen nach der anderen Seite haben einen so hohen Wert von u_0 , daß sie ebenso wie die für $z = z_2$ erscheinende Parabel innerhalb des Gesichtsfeldes vollkommen als Geraden erscheinen. Praktisch kann man also am Keil bei wachsender Keildicke nur Geraden,

Kreisstücke und schließlich im Gesichtsfelde vollständig geschlossene Kreise sehen.

Je kleiner α ist, bei desto kleineren Werten von $|D|$ erscheinen gekrümmte Kurven und innerhalb des Gesichtsfeldes geschlossene Kreise entsprechend (26).

3. Zusammenfassung der Resultate des zweiten Teiles.

Bei den Interferenzerscheinungen an einem Keil, auf den sich das Interferometer von Michelson in dem im zweiten Teil der Arbeit behandelten Fall, zurückführen lässt, sind unter Voraussetzung eines kleinen Einfalls winkels der Strahlen je nach der Größe des Öffnungswinkels des beobachtenden optischen Systems zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Bei hinreichend großem Öffnungswinkel sendet nach einem Punkte des Schirmes ein größerer Teil der Flammenfläche Strahlen hin. Unter dieser Voraussetzung hat Feussner seine Theorie entwickelt, wonach nur gerade, parallel zur Keilkante auf dem Keil gelegene Linien als Interferenzkurven auftreten können in Übereinstimmung mit meinen Beobachtungen.

2. Bei hinreichend kleinem Öffnungswinkel kann nach einem Punkte des Schirmes nur ein kleines Element der Flammenfläche Strahlen senden. In diesem Falle müssen nach meinen Entwickelungen außer geraden, parallel zur Keilkante gelegenen Linien auch gekrümmte Kurven in der Gegend des Keils auftreten, und zwar sind es, wie die numerische Rechnung zeigt, praktisch Kreisstücke und bei größerer Keildicke schließlich vollständige, exzentrisch gelegene Kreise. Erst bei relativ großer Keildicke liegen die Kreise konzentrisch. Mit wachsender Entfernung des beobachtenden optischen Systems nimmt die Krümmung der Kurven bis zum Werte 0 ab, d. h. es sind bei hinreichender Entfernung schließlich nur gerade Linien zu sehen.

Damit löst sich ohne weiteres der in der Einleitung gekennzeichnete Gegensatz zwischen Feussner und Michelson:

Offenbar hat Michelson, wie auch aus seinen theoretischen Entwickelungen zu schließen ist, seine Beobachtung gekrümmter Kurven bei kleinem Öffnungswinkel und geeigneter

Entfernung des beobachtenden optischen Systems ausgeführt, so daß die einen großen Öffnungswinkel voraussetzende Theorie von Feussner auf sie gar nicht angewendet werden kann. Setzt man einen kleinen Öffnungswinkel des beobachtenden Systems voraus, so ergibt auch die Theorie vollkommen streng die Existenz gekrümmter Kurven am Keil.

Die vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität Breslau auf freundliche Anregung von Herrn Professor Dr. O. Lummer, Geh. Reg.-Rat und Hrn. Professor Dr. E. Waetzmann ausgeführt. Beiden Herren sage ich für das mir erwiesene Wohlwollen und die Förderung dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank, besonders Hrn. Prof. Waetzmann, der mich stets in der liebenswürdigsten Weise beraten hat.

Auch Hrn. Prof. Dr. E. Pringsheim danke ich für das dieser Arbeit entgegengebrachte Interesse.

(Eingegangen 29. November 1915.)

4. Über die absolute elektrooptische Verzögerung
und Beschleunigung
bei der elektrischen Doppelbrechung;
von F. Hünstedt.

(Mitgeteilt aus Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wiss. math. naturw. Klasse, Jahrgang 1915, 8. Abhdlg.)

I.

Die Erscheinung der elektrischen Doppelbrechung ist zuerst von Kerr¹⁾ beobachtet worden, und zwar bei Versuchen mit Glas. Die gegen die Beweiskraft dieser ersten Versuche erhobenen Bedenken, daß nämlich die beobachtete Doppelbrechung verursacht sein könnte durch mechanische und thermische Spannungen, also durch Sekundäreffekte der Elektrisierung, wurden von Kerr widerlegt durch den Nachweis des Auftretens der elektrischen Doppelbrechung bei Flüssigkeiten, welche in einem homogenen elektrischen Felde sich befanden. Die Versuchsanordnung war so gewählt, daß das durch ein Nicol N_1 geradlinig polarisierte Licht die zwischen den Metallplatten P_1 und P_2 befindliche Flüssigkeit durchsetzte und durch das Nicol N_2 ausgelöscht werden konnte (Fig. 1). Wurde zwischen P_1 und P_2 ein elektrisches Feld erregt und bildeten die Kraftlinien desselben mit der Polarisationsebene des Lichtes einen Winkel von 45° , so konnte die auftretende Doppelbrechung der Flüssigkeit leicht beobachtet werden.

Bei diesen Versuchen gelang es Kerr¹⁾, das Gesetz der elektrischen Doppelbrechung aufzufinden, wonach der Gangunterschied Δ der außerordentlichen und der ordentlichen Welle proportional der Länge der durchstrahlten Schicht und proportional dem Quadrat der Feldstärke ist.

$$(1) \quad \Delta = B \cdot l \cdot E^2$$

E = Feldstärke, l = Länge der Schicht, B eine der Flüssig-

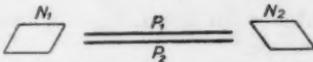


Fig. 1.

1) Kerr, Phil. Mag. (4) 50. p. 446. 1875.

keit individuelle Konstante, welche bei einzelnen Flüssigkeiten positives, bei anderen negatives Zeichen hat, also darauf hinweist, daß wir elektrooptisch positive und negative Flüssigkeiten ganz nach Analogie der positiven und negativen Kristalle zu unterscheiden haben.

Der Wert von B , der sich aus jener Gleichung ergibt, wenn λ in Wellenlängen, l in Zentimetern und E in absoluten elektrostatischen Einheiten gemessen wird, heißt die Kerrsche Konstante.

Genaue Messungen über den Wert derselben für verschiedene Substanzen und verschiedene Wellenlängen sind zuerst von Quincke¹⁾ ausgeführt, später von mehreren anderen Physikern. Die für alle Wellenlängen des sichtbaren Spektrums sich ergebende gute Übereinstimmung in den Beobachtungen der neueren Arbeiten von Mac Comb²⁾ und von Lyon³⁾ bietet wohl eine Garantie für die Zuverlässigkeit dieser Werte. Berücksichtigt man, daß $\lambda = \frac{l(n_a - n_o)}{B \cdot E^2}$ ist, wo n_a und n_o die Brechungsindizes der außerordentlichen und ordentlichen Welle sind, so kann man die Gleichung (1) schreiben:

$$(2) \quad n_a - n_o = \lambda \cdot B \cdot E^2 = (n_a - n) - (n_o - n)$$

und man sieht, es bleibt, nachdem B bestimmt ist, nun noch die Aufgabe zu lösen, $n_a - n$ und $n_o - n$ jedes für sich zu bestimmen.

Die ersten Versuche, die absolute elektrooptische Verzögerung bzw. Beschleunigung zu messen, hat Quincke gemacht, und zwar unter Benutzung des Jaminschen Interferentialrefraktors. Es ist ihm nicht gelungen, brauchbare Werte zu erhalten. Wurde an die Platten der Kerrschen Zelle eine größere Potentialdifferenz angelegt, so zeigten die Interferenzstreifen sehr bald unregelmäßige hin- und herwogende Bewegung, durch welche die von der elektrischen Doppelbrechung herrührende Verschiebung fast immer verdeckt wurde.

Kerr⁴⁾ hat die Versuche mit derselben Anordnung wiederholt und ihm ist es gelungen, sich von der störenden Bewegung

1) G. Quincke, Wied. Ann. 19. p. 729. 1883.

2) Mac Comb, Phys. Rev. 29. p. 525. 1909.

3) Lyon, Über die Dispersion der elektrischen Doppelbrechung. Diss. Freiburg i. Br. 1914.

4) Kerr, Phil. Mag. (5) 37. p. 380. 1894.

der Interferenzstreifen bis zu einem gewissen Grade unabhängig zu machen.

G_1 und G_2 sind die Platten des Jaminschen Interferential-refraktors, P_1 und P_2 die Metallplatten der Kerr-Zelle, von denen P_2 dauernd an Erde, während P_1 auf höheres Potential gebracht werden kann (Fig. 2). Durch Benutzung des Nicols N kann man entweder mit parallel den Kraftlinien oder mit senkrecht dazu polarisiertem Lichte beobachten. Kerr stellte nun fest, daß, ganz wie Quinecke das beschrieben, bei allmählicher Steigerung des Potentials von P_1 die Interferenzstreifen in unregelmäßige Bewegung gerieten, wohl auch ganz verschwan-

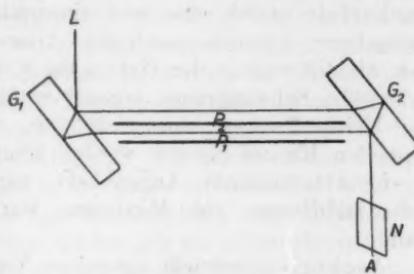


Fig. 2.

den, weiter beobachtete er aber, daß, wenn es gelang, die Platte längere Zeit auf einem konstanten höheren Potential zu halten, die Streifen mehr oder weniger scharf wieder auftreten und man dann bei plötzlicher Entladung der Platte einen momentanen Sprung der Streifen erkennen konnte. Derselbe Sprung, aber in entgegengesetzter Richtung, konnte erkannt werden, wenn die Platte P_1 plötzlich mit einer genügend hoch geladenen Batterie von Leydener Flaschen verbunden wurde. Ein solches Springen der Streifen konnte von Kerr aber nur beobachtet werden, wenn das Licht senkrecht zu den Kraftlinien des elektrischen Feldes polarisiert, also der Lichtvektor parallel den elektrischen Kraftlinien war.

Voigt hat in seiner Magneto- und Elektrooptik darauf aufmerksam gemacht, daß das negative Resultat Kerrs bei den parallel zu den Kraftlinien polarisierten Strahlen wohl nicht zu dem Schlusse berechtige, daß das elektrische Feld auf diese Strahlen keine Wirkung ausübe, sondern wohl nur darauf hinweise, daß diese Wirkung zu klein sei, um mit der nicht sehr genauen Beobachtungsmethode wahrgenommen werden zu können. In der Tat hat denn auch Aeckerlein¹⁾,

1) G. Aeckerlein, Phys. Zeitschr. 7. p. 594. 1906.

der mit Nitrobenzol arbeitete, einer Substanz, deren elektrische Doppelbrechung 100mal stärker ist, als die des von Kerr benutzten CS_2 , sowohl bei dem senkrecht als dem parallel den elektrischen Kraftlinien polarisierten Lichte einen Einfluß des elektrischen Feldes wahrgenommen. Die großen Schwierigkeiten, welche die verhältnismäßig große Leitfähigkeit des Nitrobenzols derartigen Versuchen bereitet, hat Aeckerlein durch eine sehr sinnreiche, von Mandelstam angegebene Versuchsanordnung überwunden, bei der die Potentialdifferenz an den Platten der Kerr-Zelle durch schnelle elektrische Schwingungen erzeugt wurde und als Lichtquelle der kleine Funken eines mit dem Schwingungskreise gekoppelten Kreises benutzt werden konnte, so daß der Effekt in einem bestimmten Augenblicke, nämlich dann, wenn die Potentialdifferenz ein Maximum war, beobachtet werden konnte.

Aeckerlein schließt aus seinen Versuchen, daß das senkrecht zu den Kraftlinien polarisierte Licht verzögert, das parallel den Kraftlinien polarisierte beschleunigt wird und daß das Größenverhältnis dieser Effekte etwa 2:1 sei, die Beobachtung also mit der Larmor-Langevinschen Theorie in Übereinstimmung sei. Voigt¹⁾ hat darauf aufmerksam gemacht, daß es nicht angängig ist, aus diesen Messungen Schlüsse für oder gegen die bisher aufgestellten Theorien der elektrischen Doppelbrechung zu ziehen, da der Effekt den Aeckerlein beobachtet hat, durch eine Superposition der elektrischen Doppelbrechung und der Elektrostriktion hervorgerufen ist, und daß der Einfluß der letzteren bei jenen Versuchen sich sehr schwer abschätzen läßt, weil gar keine Erfahrungen darüber vorliegen, ob die Elektrostriktion den schnellen elektrischen Schwingungen zu folgen vermag, oder ob sich nur ein Mittelwert derselben einstellt.

II.

Schon ehe die Publikation von Aeckerlein erschien, hatte ich versucht, mit der von Quincke und Kerr benutzten Anordnung zu arbeiten, hatte aber bei Benutzung eines vorzüglichen Zehnderschen Interferentialrefraktors, den mir Herr K. R. Koch aus der Sammlung der technischen

1) W. Voigt, *Phys. Zeitschr.* **7**. p. 811. 1906.

Hochschule in Stuttgart in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt hatte, trotz vielfacher Bemühungen die störenden Wirbelbewegungen der benutzten Flüssigkeiten nicht beseitigen können, so daß ich daran dachte, die Versuche mit einem festen Dielektrikum auszuführen. Die Erfahrungen Tauerns¹⁾ bei seinen Versuchen über die elektrische Doppelbrechung in Gläsern ließen mich jedoch erkennen, daß das bei der geringen Doppelbrechung der Gläser aussichtslos war und ich habe die Frage mit Flüssigkeiten wieder aufgenommen, als ich in dem Löwe-Zeißschen Interferometer²⁾ einen Apparat fand, der für diese Messungen gegenüber dem Jamin-Zehnderschen Apparate nicht unwesentliche Vorteile bot. Diese bestehen einmal darin, daß, wie Löwe schon hervorgehoben hat, man in den in der unteren Gesichtshälfte unveränderlich feststehenden Interferenzstreifen eine unveränderliche Nullmarke hat, gegen welche sich die in der oberen Hälfte stattfindende Streifenverschiebung sehr sicher ablesen läßt, sodann darin, daß die Optik so sicher und leicht einstellbar ist, daß man sich nicht zu scheuen braucht, die Kerr-Zelle zwecks daran vorzunehmender Abänderungen wieder und wieder wegzunehmen. Nur diese Möglichkeit, an einer Zelle immer wieder herumzuprobiieren und verbessern zu können, hat es mir möglich gemacht, dieselbe stets, oft allerdings erst nach zahlreichen vergeblichen Versuchen in einen Zustand zu bringen, in dem mit ihr quantitative Versuche sich ausführen ließen.

Die Einrichtung der Kerr-Zelle war die folgende: Auf ein 50 cm langes Glasrohr von 5,5 cm Durchmesser waren an beiden Enden kurze Messingrohrstücke aufgesetzt, an welchen ringförmige Scheiben angelötet waren, die die nötige Untergeschichte für die aufzukittenden Glasplatten bieten sollten. Die Rohrstücke waren so ausgedreht, daß sie ganz knapp über die Enden des Glasrohrs paßten und wurden mit einer minimal dünnen Schellackschicht, oder auch ganz ohne diese aufgesteckt. Die eigentliche Dichtung wurde durch von außen aufgetragenen Rollerkitt erreicht. Nachdem die Messingringe aufgekittet waren, wurden die Scheiben an den Enden auf

1) O. D. Tauern, Über das Auftreten des Kerrphänomens in Gläsern.
Diss. Freiburg i. Br. 1909.

2) F. Löwe, Phys. Zeitschr. 11. p. 1047. 1910.

der Drehbank mit peinlicher Sorgfalt senkrecht zur Rohrachse abgedreht und hierauf die 4 mm dicken Spiegelglasplatten mit ganz dünner Schellackschicht aufgekittet und wieder von außen an den Rändern mit einer dicken Schicht Rollerkitt gedichtet. Die Beschaffung geeigneter Glasplatten war nicht leicht. Dünnerne Platten bogen sich, wenn Flüssigkeit in das Rohr eingefüllt wurde, so stark durch, daß es nicht möglich war, gute Interferenzstreifen zu erhalten. Ich gelangte schließlich zum Ziele, indem ich mehrere Dutzend Spiegelglasplatten schneiden ließ und probierte, bis ich spannungsfreie Stücke gefunden hatte.

Der Einbau der Metallplatten *aa* (Fig. 3) erfolgte nach mannigfachen andern vergeblichen Versuchen in der Weise,

daß sie auf zwei Spiegelglasstreifen *cc*, wie aus der Zeichnung zu ersehen ist, je mit zwei Schrauben festgeschraubt wurden. Die Spiegelglasplatten wurden in passender Entfernung gehalten durch drei Schrauben aus Elfenbein, die zugleich die beiden Glasplatten *bb* festhielten, welche angenähert gleiche Dicke besaßen, wie die Metallplatten. Die letzteren waren 5 mm dick, 25 mm hoch, 450 mm lang aus Nickel gehobelt und sorg-

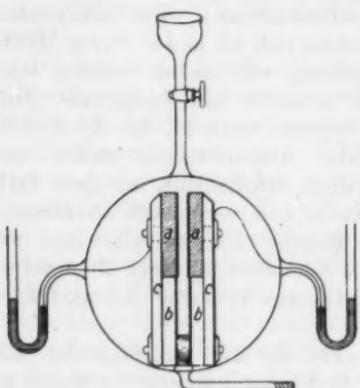


Fig. 3.

fältig eben geschliffen. Die Zuleitungsrähte zu den Platten waren, wie die Figur erkennen läßt, in zwei Ansatzröhren gezogen, die durch Quecksilber verschlossen waren. Die Flüssigkeit wurde durch die oberen Röhren eingefüllt, konnte durch die untere weite Röhre schnell abgelassen werden, um auf diese Weise kleinste Staubteilchen mitzureißen. Die Röhre wurde stets ganz mit Flüssigkeit gefüllt, so daß sie noch 4 bis 5 cm hoch in den oberen Ansatzröhren stand. Von diesen wurde die eine mit Hahn verschlossen, die andere endigte in eine feine Kapillare. In einem Gefäße mit größerer freier Flüssigkeitsoberfläche ist es mir nie gelungen, ruhige Inter-

ferenzstreifen zu erhalten. An einer solchen Oberfläche findet offenbar fortgesetzte Verdampfung und Kondensation statt.

Um Temperaturschwankungen möglichst zu vermeiden, konnte der Apparat in einen außen mit Staniol beklebten Kasten in Watte eingepackt werden, der nur an der Vorder- und Rückseite schmale Spaltöffnungen für die Lichtbündel hatte.

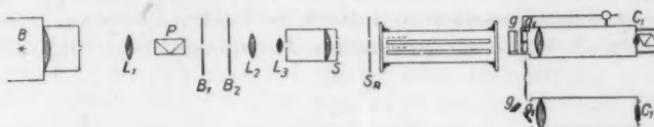


Fig. 4.

Die benutzte Versuchsanordnung wird aus der Skizze (Fig. 4) leicht verständlich sein: Das Licht einer mit 30 bis 40 Amp. brennenden Bogenlampe mit horizontal stehender positiver Kohle wurde durch zwei geradsichtige hintereinander geschaltete Prismen spektral zerlegt und mit Hilfe passend aufgestellter Spalte und Linsen wurde ein schmales Bündel gut paralleler einfarbiger Strahlen hergestellt, mit dem der Spalt des Interferometers beleuchtet wurde. Aus S treten dann zwei parallele, sehr schmale Lichtbündel aus, von denen das eine zwischen den Platten hindurch, das andere außerhalb verläuft und die in das Beobachtungsfernrohr gelangen, vor dem der bekannte Kompensator, die drehbare Glasplatte g_1 , angebracht ist und vor dessen Okular (Zylinderlinse) bei Bedarf ein Nicol oder ein Kalkspat gesetzt werden konnte. Mit Hilfe des Kompensators kann man die Streifen so einstellen, wie nebenstehende Figur zeigt. Der obere Teil wird gebildet von den zwischen den Metallplatten aa , der untere von den zwischen den Glasplatten bb durchgegangenen Strahlen (vgl. Fig. 5). Diese Streifen im untern Teile müssen, wenn alles richtig funktioniert, auch beim Anlegen einer Spannung an die Kerr-Zelle ruhig stehen bleiben und die Nullmarke abgeben.

Die elektrische Anordnung ist aus beistehender Skizze (Fig. 6) ersichtlich. Eine große Vossche Influenzmaschine wurde durch einen Elektromotor in passende Geschwindig-

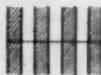


Fig. 5.

keit versetzt. Der eine Pol lag an Erde, der andere stand in Verbindung mit der inneren Belegung einer Batterie von sechs großen Leydener Flaschen, deren große Kapazität ausgleichend wirkte gegenüber kleinen unvermeidlichen Schwankungen in der Elektrizitätszufuhr der Maschine. Durch Verändern des Abstandes der Saugspitzen S von der gegenüberstehenden isolierten Scheibe hatte man es in der Hand, die Aufladung der Platte P_1 der Kerr-Zelle langsamer oder schneller zu bewirken und durch die Funkenstrecke am Mikrometer F wurde die gewünschte Potentialdifferenz eingestellt.

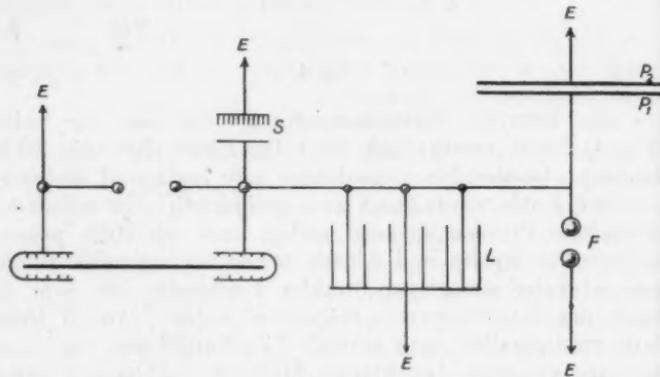


Fig. 6.

Die Kugeln des Funkenmikrometers hatten 2 cm Durchmesser und waren so aufgestellt, daß keine Störung durch benachbarte Leiter zu fürchten war. Die Voltzahl wurde dann aus der Tabelle im Kohlrausch entnommen.

Wurde nun bei einer solchen Kerrschen Zelle, nachdem Temperaturgleichgewicht eingetreten war und die Streifen vollkommen scharf und ruhig waren, die Elektrisiermaschine in Tätigkeit gesetzt, so setzte sofort eine starke Bewegung der Interferenzstreifen ein und dieselben waren meist nach wenigen Sekunden verschwunden; die Streifen erschienen zwar nach einiger Zeit wieder, wogten dann aber fast fortgesetzt, mehr oder weniger stark, hin und her und zwar nicht nur der Teil, welcher im elektrischen Felde war, sondern auch der außerhalb des Feldes liegende Teil, so daß es ganz

unmöglich war, Messungen zu machen. Dabei gelang es oft nicht, trotz reichlich von der Maschine gelieferter Elektrizitätsmenge, eine größere Potentialdifferenz zu erhalten. War z. B. die Maschine so eingestellt, daß ohne Zelle am Funkenmikrometer 10—12 mm lange Funken übergingen, so sank die Schlagweite auf 5, ja 3 mm. Legte man plötzlich eine höhere Spannung an, wie es Kerr getan hat, so konnte man zwar, wenn das Licht senkrecht zu den Kraftlinien polarisiert war, einen plötzlichen Sprung der oberen Streifen gegen die unteren sehen, aber die Streifen verschwanden dann so schnell, daß eine genauere quantitative Beobachtung nicht möglich war. War das Licht parallel zu den Kraftlinien polarisiert, so konnte ich den Sprung nicht sehen und aus diesen Beobachtungen würde ich auch den Schluß haben ziehen müssen, den Kerr gezogen hat, daß nämlich nur bei dem senkrecht zu den Kraftlinien polarisierten Lichte, nicht aber bei den parallel dazu polarisierten Strahlen eine Wirkung vorhanden sei. Untersuchte man eine Zelle, mit der solche Versuche ausgeführt waren, in der Weise, daß man durch zweckmäßige Beleuchtung in dem ganzen schmalen Kanale zwischen den Platten entlang sehen konnte, so ließ sich zweierlei feststellen: Auf den Platten saßen meist minimale Gasbläschen, die beim Anlegen des elektrischen Feldes unausgesetzt hin- und herwanderten und ferner zeigten sich eine mehr oder weniger große Zahl von äußerst feinen stäbchenartigen Teilchen, die ebenfalls hin- und herflogen, z. T. aber auch sich zu Brücken zwischen den Platten anordneten. Beide Störungen konnten auf folgendem Wege sicher beseitigt werden. Zuerst wurde die Spannung der elektrischen Zentrale von 220 Volt einen Tag lang angelegt und durch öfters Klopfen wurde die sich bildenden Gasblasen beseitigt. So dann legte man 5000 Volt einer Akkumulatorenbatterie längere Zeit an und dann die Elektrisiermaschine in der oben skizzierten Anordnung. Man konnte dann immer noch durch Klopfen Gasblasen zum Aufsteigen bringen, konnte aber auch durch die zunehmende Schlagweite am Funkenmikrometer feststellen, daß die Isolation stetig besser wurde. Aber auch nachdem keine Gasbläschen mehr sich zeigten, blieb meist eine gewisse Unruhe der Interferenzstreifen noch immer und die Erfahrung lehrte, daß diese von den kleinen,

feinen Flitterchen herrührte. Diese zu beseitigen, ist nach vielen vergeblichen Versuchen dadurch gegückt, daß ich Funken zwischen den Platten überspringen ließ. Geschieht dies bei einer frisch gefüllten Zelle, so wird dieselbe meist zertrümmert und der Schwefelkohlenstoff kann dabei leicht in Brand geraten. Hat man aber in der vorher angegebenen Weise die Flüssigkeit von allen Luftbläschen sorgfältig befreit, und achtet darauf, daß der Trog vollständig mit Flüssigkeit gefüllt ist, und oben das Einfüllrohr offen ist, so kann man ohne jede Gefahr stärkere Funken durch die Flüssigkeit hindurchschlagen lassen. Diese springen wahrscheinlich gerade an den Stellen über, wo diese kleinen Flitterchen sich befinden und bewirken ein Zerreissen und wohl auch Verkohlen derselben. Die Reststücke sinken dann zu Boden, allerdings oft nur sehr langsam. Durch diese allerdings recht zeitraubende Behandlung der Zelle habe ich bei Schwefelkohlenstoff nicht nur eine vorzügliche Isolation erreichen können — bei 3 mm Plattenabstand Parallelfunken bis 14 mm —, sondern auch ein vollständiges Scharfbleiben der Interferenzstreifen, so daß Verschiebungen von $\frac{1}{20}\lambda$ gut meßbar waren.

Eine so hergerichtete Zelle behielt ihre guten Eigenschaften dauernd bei. Ich habe eine Zelle über ein Jahr in Benutzung gehabt, habe sie Wochen lang unbenutzt stehen lassen, um sie immer wieder, wenn sich bei anderen Flüssigkeiten Schwierigkeiten ergaben, sozusagen als Kontrollzelle für die ganze Apparatur heranzuziehen. Sie wird unbrauchbar nur dadurch, daß unter der Einwirkung des CS_2 sich doch mit der Zeit winzige Schellackflitterchen der Kittung loslösen, die dann durch ihr Hin- und Herfahren im elektrischen Felde die Beobachtung unmöglich machen.

III.

Die Beobachtungen erfolgten nun in der folgenden Weise: Vor das Okular des Interferometers wurde ein Nicol gesetzt, derart, daß mit senkrecht zu der Feldrichtung polarisiertem Lichte beobachtet wurde. Mit Hilfe der Kompensatorplatte wurden die Streifen eingestellt, so daß die zwischen den Metallplatten befindlichen genau die Fortsetzung der unteren Streifen bildeten. Am Funkenmikrometer wurde eine bestimmte

Funkenlänge eingestellt und die Saugspitzen wurden so reguliert, daß etwa alle 10—20 Sekunden ein Funken übersprang. Sobald nun die Zelle eingeschaltet war, also die Aufladung der Zelle stattfand, sah man die Streifen im Felde sich langsam verschieben und im Moment des Funkens wieder in die Ruhelage zurückspringen.

Der Versuch konnte sozusagen beliebig oft wiederholt und die Größe der Ablenkung scharf bestimmt werden. War das geschehen, so wurde das Nicol um 90° gedreht und die entsprechende Messung mit Licht ausgeführt, das parallel zu den Kraftlinien polarisiert war. Der Sinn der Streifenverschiebung, ob Beschleunigung oder Verzögerung, konnte dann nachträglich ohne weiteres mit Hilfe der Kompensatorplatte ermittelt werden. Resultat: *Senkrecht zu den Kraftlinien polarisiertes Licht erfährt bei den beschriebenen Versuchen im CS_2 eine Verzögerung, parallel zu den Kraftlinien polarisiertes eine Beschleunigung.*

Das Größenverhältnis der beiden Wirkungen ist 4:1.

Der Versuch konnte natürlich auch in der von Kerr benutzten Anordnung ausgeführt werden, d. h. es wurde eine Flaschenbatterie bis zu genügend hohem Potential aufgeladen und die innere Belegung derselben dann plötzlich mit der einen Platte der Zelle verbunden, während die andere an Erde blieb. Man beobachtete dann das plötzliche Springen der Streifen, wie es Kerr beschrieben hat. Die Resultate waren qualitativ die gleichen, ließen sich aber quantitativ nicht so genau verfolgen, schon um deswillen nicht, weil es schwer ist, auf diese Weise immer genau die gleiche Potentialdifferenz an den Platten zu erzeugen.

Bei beiden Versuchsanordnungen konnte das Nicol durch eine Kalkspatplatte ersetzt werden. Das Gesichtsfeld hatte dann das nebenstehende Aussehen (Fig. 7). Die Streifen I und III rührten her von den senkrecht und parallel den Kraftlinien polarisierten Strahlen zwischen den das elektrische Feld erzeugenden Platten, die Streifen II und IV von den ebenso polarisierten, aber nicht im Felde verlaufenden Lichtstrahlen. Wenn das Feld erregt wurde, sah man die Streifen I nach links,

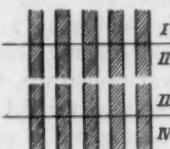


Fig. 7.

III nach rechts sich verschieben und bei Funkenübergang natürlich wieder den Sprung nach rechts bzw. links zurück in die Ruhelage. Die Meßgenauigkeit wurde dadurch nicht vergrößert, nur subjektiv möchte ich sagen, wurde die Zuversicht in die Richtigkeit der Beobachtung größer dadurch, daß man beide Erscheinungen, das Rechts- und Links-springen, gleichzeitig sah.

Bei einer dritten Anordnung wurde weder Nicol noch Kalkspat benutzt, also mit natürlichem Lichte beobachtet. Die Überlegung, welche auf diese Versuchsanordnung geführt hat, ist die folgende. Wenn die beiden senkrecht zueinander polarisierten Schwingungen, aus denen man sich



Fig. 8.

das natürliche Licht zusammengesetzt denken kann, durch das elektrische Feld verschieden beeinflußt werden, so müssen sie dadurch voneinander getrennt werden, statt eines Systems von Interferenzstreifen müssen deren zwei auftreten und aus der Superposition dieser beiden Streifensysteme muß eine neue Erscheinung entstehen. In der Tat, es sei in Fig. 8 Nr. 1 das System dargestellt, ohne angelegtes elektrisches Feld. Da der untere Teil stets außerhalb des Feldes ist, so wird dieser stets ungeändert bleiben. In dem oberen Teile werden die senkrecht zu den Kraftlinien polarisierten Streifen bei Felderregung eine Verschiebung nach links erfahren und zwar wollen wir, wie in Nr. 2 gezeichnet, annehmen, die Größe derselben sei 0,4. Dann werden nach den oben mitgeteilten Messungen die parallel den Kraftlinien polarisierten Streifen eine Verschiebung von 0,1 nach rechts erfahren müssen, wie es in Nr. 3 dargestellt ist. Durch Überlagerung von Nr. 2 und Nr. 3 erhält man das Resultat, daß in der unteren Gesichtshälfte die Streifen wie immer unverändert scharf bleiben, daß sie aber in der oberen Gesichtshälfte verschwinden müssen. Wird die Potentialdifferenz an den Platten der Zelle weiter gesteigert, so müssen die Streifen allmählich wieder hervor-

treten und wie man durch Zeichnung der Streifen sich leicht klarmachen kann, müssen die Streifen der oberen Gesichtshälfte dann mit voller Schärfe wieder auftreten, wenn die Verschiebung der senkrecht zu den Kraftlinien polarisierten Strahlen 0,8 nach links, die der parallel dazu polarisierten dann natürlich 0,2 nach rechts beträgt. Es werden aber die Streifen der oberen Gesichtshälfte jetzt nicht senkrecht über denen der unteren stehen können, sondern gegen diese um 0,2 nach rechts verschoben erscheinen müssen.

Wird die Feldstärke weiter vergrößert, bis die senkrecht zu den Kraftlinien polarisierten Strahlen 1,2, die parallel dazu polarisierten 0,8 verschoben sind, so müssen die Streifen in der oberen Gesichtshälfte wieder verschwinden. Die Versuche haben diese Überlegung vollkommen bestätigt. Es wurde eine große Flaschenbatterie benutzt, um die Aufladung langsam zu bewerkstelligen derart, daß man nach etwa 6 Sekunden die oberen Streifen verschwinden sah. Es ließ sich dann bei der mittleren Beobachtung mit großer Schärfe die erwartete Verschiebung von 0,2 beobachten, so daß diese Messungen eine sehr wertvolle Bestätigung des oben gefundenen Verhältnisses 4:1 bilden.

Es wurden weiter dann diese Beobachtungen derart abgeändert, daß man die Funkenstrecke am Mikrometer so einzuregulieren suchte, daß gerade, wenn die Streifen verschwanden, bzw. wieder größte Schärfe erlangt hatten, die Entladung eintrat, wobei die Streifen dann natürlich momentan in die Ruhelage zurücksprangen. Auf diese Weise konnte am sichersten das Potential bestimmt werden, das einer Gesamtwirkung von $1/2 \lambda$, $2 \cdot 1/2 \lambda$ und $3 \cdot 1/2 \lambda$ entsprach. Stärkere Doppelbrechung zu erzielen ist mir trotz vielfacher Bemühungen nicht gelungen, da die Durchschlagsfestigkeit des Schwefelkohlenstoffs nicht weiter ging.

IV.

In ganz derselben Weise wie mit Schwefelkohlenstoff wurden Versuche mit Chlorbenzol angestellt. Nach geeigneter Vorbehandlung ließ die Isolation nichts zu wünschen übrig. Da die Kerr-Konstante dieser Substanz nahezu viermal größer ist als die des CS_2 , so konnte mit wesentlich geringerer Feldstärke gearbeitet werden und ließen sich die Messungen

mit großer Schärfe ausführen. Das Resultat war genau das-selbe wie bei Schwefelkohlenstoff.

Hierauf wurde Rizinusöl untersucht, um eine Flüssigkeit mit negativer Kerr-Konstante zu haben. Die Isolation war vorzüglich, aber die Zähflüssigkeit machte die Beobachtungen schwieriger als bei den vorhergehenden Substanzen, es war sehr schwer, gerade Interferenzstreifen zu erhalten, wohl weil minimale Dichteverschiedenheiten sich sehr schwer ausgleichen. Selbst, wenn das gefüllte Rohr 24 Stunden in möglichst konstanter Temperatur gestanden hat, kann man noch Schlieren erkennen, die natürlich keine reinen Interferenzstreifen zustande kommen lassen. Die beim CS_2 gesammelten Erfahrungen halfen aber schließlich über diese Schwierigkeiten hinweg und es gelang, sehr gute Messungen auszuführen.

Das Resultat ist genau das gleiche, wie bei CS_2 , mit dem einzigen Unterschiede, daß die senkrecht und parallel den Kraftlinien polarisierten Lichtstrahlen ihre Rollen vertauscht haben, entsprechend der Tatsache, daß für Rizinusöl die Kerr-Konstante entgegengesetztes Vorzeichen hat, wie für CS_2 . Für das Verhältnis $\frac{n_e - n}{n_0 - n}$ ergab sich der Wert $-1/4$.

Mit Chloroform, Äthyläther, Benzol, Nitrobenzol und Rapsöl ist es mir nicht gelungen, Messungen auszuführen. Trotz sorgfältigster Reinigung war es bei keiner dieser Substanzen möglich, ein genügend starkes elektrisches Feld zu erzeugen, um sicher meßbare Verschiebungen der Interferenzstreifen erhalten zu können. Infolge der ungenügenden Isolation entsteht bei der hohen erforderlichen Potentialdifferenz ein elektrischer Strom, der wohl in erster Linie durch seine Wärmewirkung ein fortgesetztes Wandern der Interferenzstreifen erzeugt und zwar wandern zu Anfang die im Felde befindlichen Streifen schneller, als die außerhalb befindlichen, doch werden bald auch diese in Bewegung gesetzt und man sieht an ihrer Krümmung deutlich, wie die zwischen den Metallplatten beginnende Erscheinung sich allmählich auf die übrige Flüssigkeit ausdehnt. Natürlich findet auch bei Entladung des Kondensators nur ein sehr langsames Zurückgehen in die Ruhelage statt. Wenn die Elektrisierung längere Zeit ge-

dauert hat, so verschwinden meist die Interferenzstreifen ganz und treten erst nach Stunden langer Ruhe wieder auf.

Auch die Versuchsanordnung, bei der plötzlich ein höheres Potential angelegt wird, ergab keine brauchbaren Resultate. Man kann dann wohl im ersten Moment einen Sprung der Streifen feststellen, aber diese verzerren sich fast momentan, so daß Messungen nicht möglich sind.

Auch mit Wechselspannungen habe ich keinen Erfolg gehabt. Der Strom einer Hochfrequenzmaschine mit 1800 Wechseln in der Sekunde konnte durch einen Transformator von Klingelfuß bis 30000 Volt hinauftransformiert werden. Beim Anlegen der Spannung zeigte sich die Erscheinung, wie sie Aeckerlein schon beschrieben hat, die Streifen verändern deutlich ihr Aussehen, man kann auch wohl feststellen, daß sie einseitig breiter werden, aber quantitative Messungen hierbei anzustellen, ist mir nicht gelungen. Die Aeckerleinsche Anordnung der Beobachtung mit einem Momentfunkens war bei meiner Anordnung nicht durchführbar, weil das Licht des Funkens nicht ausreichte. Dagegen ist es mit derselben Versuchsanordnung, mit der CS_2 und Rizinusöl untersucht wurden, gelungen, geringprozentige Mischungen von Nitrobenzol mit Hexan und noch besser solche mit Petroläther zu untersuchen. Nitrobenzol hat eine so große Kerr-Konstante, daß schon ein geringer Zuzatz zu Hexan oder Petroläther, deren elektrische Doppelbrechung nahezu gleich Null ist, genügt, um eine Flüssigkeit zu erhalten, die einerseits noch vorzüglich isoliert, so daß bei 3 mm Plattenabstand Potentialdifferenzen bis 30000 Volt angelegt werden konnten und andererseits eine elektrische Doppelbrechung zeigt, die gleich und sogar noch größer als die des CS_2 ist. Bei 2-3proz. Mischungen ließ die Schärfe der Beobachtung nichts zu wünschen übrig und bei ihnen ergab sich für $\frac{n_s - n}{n_0 - n}$ stets der Wert - 4. Dieser Wert scheint mir danach für alle genügend isolierenden Flüssigkeiten sichergestellt zu sein.

V.

Eine genaue Kenntnis der Absolutwerte der Beschleunigung bzw. Verzögerung, welche die beiden senkrecht zueinander polarisierten Schwingungen des Lichtes erfahren, ist

um deswillen von größerem Interesse, weil die Möglichkeit besteht, mit ihrer Hilfe eine Entscheidung zu treffen zwischen den verschiedenen Theorien der elektrischen Doppelbrechung. Darüber kann wohl kein Zweifel mehr sein, daß wir bei dieser Erscheinung es mit einer direkten Einwirkung des elektrischen Eeldes, sei es auf die Lagerung und Gruppierung der Moleküle, sei es auf die Vorgänge im Molekül selbst, d. h. die Elektronenschwingungen zu tun haben.

Larmor¹⁾ hat zur Erklärung der elektrischen Doppelbrechung zuerst die Hypothese ausgesprochen, daß die Flüssigkeitsmoleküle an sich anisotrop seien und daher im elektrischen Felde eine teilweise Orientierung erfahren müssen, der die Molekularbewegung entsprechend der Temperatur mehr oder weniger stark entgegen wirkt. Langevin²⁾ hat diese Hypothese weiter ausgearbeitet unter der speziellen Voraussetzung, daß die Anisotropie der Moleküle darin bestehe, daß sie die Gestalt von Rotationsellipsoiden besitzen und daß die Doppelbrechung lediglich dadurch zustande komme, daß das elektrische Feld eine teilweise Parallelrichtung dieser anisotropen Moleküle bewirke. Er findet durch seine Rechnungen

$$\frac{n_a - n}{n_o - n} = - 2;$$

und für die Dispersion der elektrischen Doppelbrechung wird er zu der aus andern Annahmen von Havelock³⁾ schon früher abgeleiteten Gleichung geführt

$$(3) \quad \frac{n(n_a - n)}{(n^2 - 1)^2} = \text{konst.}$$

Enderle⁴⁾ hat gezeigt, daß sich die beiden eben erwähnten Gleichungen auch dann ergeben, wenn man über die Anisotropie die denkbar allgemeinste Annahme macht, nämlich die eines dreiachsisigen Ellipsoides.

Die zweite der oben erwähnten Hypothesen ist von Voigt⁵⁾ aufgestellt und ausgearbeitet. Er nimmt an, daß die an sich isotropen Moleküle erst im elektrischen Felde anisotrop

1) A. Larmor, Phil. Trans. A p. 190. 236. 1898.

2) P. Langevin, Le Radium 7. p. 249. 1910.

3) Havelock, Proc. of the Ray. Soc. of London A p. 80. 28. 1908.

4) Enderle, Zur Theorie der elektrischen und magnetischen Doppelbrechung von Flüssigkeiten. Diss. Freiburg i. Br. 1912.

5) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik.

werden, dadurch, daß das elektrische Feld die Schwingungen der Elektronen beeinflußt und deren Ruhelage sich verschiebt. Voigt¹⁾ findet auf diese Weise:

$$(4) \quad \frac{n_a - n}{n_o - n} = + 3.$$

Herr Enderle hat auch die Voigtschen Rechnungen zu verallgemeinern gesucht, indem er die Annahme ursprünglich isotroper Moleküle fallen ließ und voraussetzt, daß auch ohne Feld schon die Moleküle anisotrop sein können. Er kommt zu dem Resultate, daß, wenn die Anisotropie nur mäßig ist bei zentrischen Molekülen, beide Gleichungen, die Havelocksche wie die Voigtsche ihre Gültigkeit behalten, daß dagegen bei azentrischen Molekülen das Verhältnis der absoluten Verzögerung einen von 3 verschiedenen Wert haben kann und daß die Havelocksche Gleichung in diesem Falle nicht gültig sein kann.

Nun hat Havelock schon darauf hingewiesen, daß die Messungen von Hagenow²⁾ am CS_2 als Stütze für die Gültigkeit seiner Formel angesehen werden können und später hat Mac Comb³⁾ für eine größere Anzahl von Substanzen aus seinen Messungen ebenfalls die Gültigkeit der Havelockschen Formel geschlossen. Lyon⁴⁾ ist durch seine sehr sorgfältigen Messungen zu dem Resultate geführt, daß die Formel sehr gut stimmt für Substanzen, die stärkere optische Dispersion und dann zugleich auch stärkere Dispersion der elektrischen Doppelbrechung zeigen, daß dagegen die Formel nicht zu gelten scheint für Äthyläther, der nur geringe Dispersion zeigte. Sieht man von Äthyläther ab, so wird man also sagen können, die Messungen sind vereinbar sowohl mit der Larmor-Langevinschen Theorie wie mit der Voigtschen. Mit der letzteren allerdings nur unter der Annahme geringer Anisotropie bei zentrischen Molekülen. Sollten weitere Messungen die Nichtübereinstimmung mit der Havelockschen Formel außer bei Äthyläther noch bei andern Substanzen ergeben, so müßte die Larmor-Langevinsche Hypothese erweitert

1) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik.

2) Hagenow, Phys. Rev. 27. p. 196. 1908.

3) Mac Comb, Phys. Rev. 29. p. 525. 1909.

4) Lyon, Über die Dispersion der elektrischen Doppelbrechung.
Diss. Freiburg i. Br. 1914.

werden, während die Voigtsche diese Beobachtungen ohne weiteres durch die Annahme azentrischer Moleküle würde erklären können.

Der Ausbruch des Krieges hat die Weiterführung der schon in dieser Richtung angefangenen Versuche bislang verhindert.

VI.

Will man die aus den Theorien abgeleiteten Beziehungen für $\frac{n_a - n}{n_o - n}$ an den Beobachtungen prüfen, so muß, wie schon oben betont wurde, die Elektrostriktion mit berücksichtigt werden. Die erforderlichen Rechnungen sind in der Arbeit von Enderle ausgeführt. Bei Benützung der Larmor-Langevinschen Theorie ergibt sich durch Kombination der Gleichungen (36) und (45) von Enderle und unter Berücksichtigung der Beziehung

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{l(n_a - n)}{\lambda} = \left[2/3 B + \frac{(k-1)(k+2)(n^3-1)(n^3+2) C}{144 \pi n \cdot \lambda} \right] E^2 l, \\ \frac{l(n_o - n)}{\lambda} = \left[-1/3 B + \frac{(k-1)(k+2)(n^3-1)(n^3+2) C}{144 \pi \cdot n \cdot \lambda} \right] E^2 l, \end{cases}$$

wo k die Dielektrizitätskonstante, C die Kompressibilität, E die Feldstärke, l die Länge des durchstrahlten Feldes.

Die linke Seite stellt die absolute Verzögerung bzw. Beschleunigung in Wellenlängen ausgedrückt dar, die bei den oben beschriebenen Versuchen direkt beobachtet werden konnten. Auf der rechten Seite dürfen B, k, n, λ, C als bekannt vorausgesetzt werden, l die Länge der durchstrahlten Schicht, und E können durch den Versuch ermittelt werden.

Das erste Glied auf der rechten Seite gibt den von der elektrischen Doppelbrechung herrührenden Betrag der Verzögerung bzw. Beschleunigung, das zweite den durch die Elektrostriktion hervorgebrachten Effekt.

Zur Prüfung dieser Formel an der Erfahrung sei ein Versuch mit CS_3 herangezogen.

Es wurden gefunden für

$$\lambda = 546 \cdot 10^{-7} \text{ cm} \quad B = 3,55 \cdot 10^{-7}$$

$\frac{l(n_a - n)}{\lambda}$	$\frac{l(n_a - n)}{\lambda}$	Volt/300
0,4	- 0,1	56,5
0,8	- 0,2	80,-

l war 45 cm, der Plattenabstand 3,08 mm, folglich l mit Randfeldkorrektion 45,1 cm.

Man kann nun zunächst mal kontrollieren, ob der Apparat einwandsfrei funktioniert, indem man die Proportionalität der Streifenverschiebung mit dem Quadrat der Feldstärke untersucht. Da ergibt sich

$$\frac{0,4}{0,8} \sim \frac{56,5^2}{80,0^2} = \frac{3192}{6400},$$

also genaue Übereinstimmung. Bei Dutzenden von Versuchen betrug die Differenz nie mehr als 3 Proz.

Eine weitere Kontrolle besteht darin, daß man die Beobachtung benutzt, um B zu bestimmen. Subtrahiert man die zweite von der ersten der obigen Gleichungen, so ergibt sich:

$$B = \frac{l(n_a - n_o)}{\lambda} \cdot \frac{1}{E^2 l} = 3,29 \cdot 10^{-7} \text{ gegen } 3,55 \cdot 10^{-7} \text{ nach Lyon.}$$

Das ist im Hinblick auf die Tatsache, daß sich bei den Verschiebungen der Interferenzstreifen die Hundertstel Wellenlängen kaum noch schätzen lassen, eine recht gute Übereinstimmung. Ja, der Umstand, daß sich auch bei Benutzung von rotem und von orangefarbenem Licht (mit Blau konnte wegen zu geringer Lichtstärke nicht beobachtet werden) für B etwas kleinere Werte als die von Lyon für diese Wellenlängen gefundenen ergeben haben, legt die Vermutung nahe, daß diese Differenz gar nicht einmal auf einer nicht genügend sicheren Einschätzung der bei den Interferenzstreifen auftretenden Verschiebung beruht, sondern daher röhren kann, daß sich bei meiner Versuchsanordnung der Plattenabstand der Kerr-Zelle nicht so genau bestimmen ließ, wie bei der Lyonschen Konstruktion der Zelle. Derselbe mußte bei den fertig montierten Platten mit dem Storchschnabel gemessen werden, und war nicht an allen Stellen genau gleich.

Hr. Dr. Lyon hatte auf meine Bitte die Freundlichkeit, den Apparat mit seiner Versuchsanordnung zu untersuchen und die gemachten Beobachtungen dazu zu benutzen, die Apparatzkonstante des Plattenabstandes zu bestimmen; er fand $3,18 \text{ mm}$ und mit diesem Werte ergibt sich aus meinen Beobachtungen für B die Zahl $3,51 \cdot 10^{-7}$ statt $3,55 \cdot 10^{-7}$.

Also der Apparat und die ganze Versuchsanordnung sind sicher in Ordnung, aber die Gleichungen stimmen gar nicht.

Setzt man nach Landolt und Börnstein für die Beobachtungstemperatur von $10^{\circ} K = 2,608$ $n = 1,644$ $C = 0,000085$, so erhält man für die rechten Seiten der Gleichungen (5), da $B \cdot E^2 \cdot l = 0,5$ war,

$$\begin{aligned} 0,333 + 0,174 &= 0,507 \text{ statt } 0,4, \\ -0,167 + 0,174 &= 0,007 \text{ statt } -0,1; \end{aligned}$$

statt des für $\frac{n_s - n}{n_s + n}$ beobachteten Wertes von -4 , ergibt die Berechnung den Wert $+72$, dem aber gar keine Bedeutung beizumessen ist, da die Differenz $0,007$ innerhalb der Beobachtungsfehler ebensowohl gleich Null oder gleich $-0,007$ gesetzt werden kann.

Aber auch mit den Formeln der Voigtschen Theorie sind die Beobachtungen nicht in Einklang zu bringen, denn der Versuch ergibt für $\frac{n_s - n}{n_s + n}$ einen negativen Wert, während die Theorie von Voigt einen positiven Wert verlangt. Macht man mit Voigt die Annahme, daß die Moleküle von sich aus ohne elektrisches Feld isotrop sind, oder auch wie Enderle p. 66 es tut, daß die Anisotropie der ursprünglich quasi elastischen Felder eine nur geringe ist, so kommt man von der Gleichung (68) bei Enderle ausgehend, zu den den Gleichungen (5) entsprechenden

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{l(n_s - n)}{\lambda} = \left[\frac{3/2 B + \frac{(k-1)(k+2)(n^2-1)(n^2+2)C}{144 \pi \cdot n \cdot \lambda}}{E^2 l} \right] E^2 l, \\ \frac{l(n_s - n)}{\lambda} = \left[\frac{1/2 B + \frac{(k-1)(k+2)(n^2-1)(n^2+2)C}{144 \pi \cdot n \cdot \lambda}}{E^2 l} \right] E^2 l. \end{array} \right.$$

Setzt man in diese die oben angegebenen Zahlenwerte ein, so findet man

$$\frac{l(n_s - n)}{\lambda} = 0,75 + 0,174 = 0,924 \text{ statt } 0,4,$$

$$\frac{l(n_o - n)}{\lambda} = 0,25 + 0,174 = 0,425 \text{ statt } -0,1,$$

und für $\frac{n_o - n}{n_s - n}$ ergibt sich $+2,2$ statt -4 .

Für Chlorbenzol konnten die Rechnungen nicht durchgeführt werden, da die Kompressibilität nicht bekannt.

Auch bei den Messungen mit Rizinusöl zeigt sich keine Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung. Es erscheint zwecklos, hier die Zahlen anzuführen, da der für die Elektrostriktion berechnete Wert sehr unsicher ist. Die Beziehung $n^2 = k$ ist hier auch nicht angenähert erfüllt, denn n^2 ist 2,19, dagegen k ist 4,56. Die Beobachtungen mit den Gemischen von Nitrobenzol und Hexan bzw. Petroläther lassen sich mit der Rechnung nicht vergleichen, da nk und C nicht bekannt sind.

VII.

Da, wie oben schon gezeigt, man für die Kerr-Konstante aus den Beobachtungen richtige Werte ableitet, wenn man die Gleichungen (5) oder (6) voneinander subtrahiert, also die Elektrostriktion eliminiert, so liegt natürlich der Gedanke nahe, daß diese nicht richtig in Ansatz gebracht sei.

Ich habe deshalb versucht, die Größe der durch die Elektrostriktion allein hervorgebrachten Verzögerung experimentell zu bestimmen. Mit der beschriebenen Versuchsanordnung ist das allerdings für CS_2 nicht ausführbar, da sich die durch die Elektrostriktion hervorgerufene Verzögerung nicht von der durch die elektrische Doppelbrechung erzeugten trennen läßt. Aber man kann die für die Größe der Elektrostriktion gegebene Formel dadurch prüfen, daß man Versuche mit einer Substanz anstellt, bei welcher B , also die elektrische Doppelbrechung nahezu Null ist. Als solche habe ich Hexan benutzt. Nach den Versuchen von Leiser¹⁾ ist der Wert von B für

1) H. Leiser, Elektrische Doppelbrechung der Kohlenstoffverbindungen. Habilitationsschrift, Karlsruhe 1910.

Hexan nur etwa $1/60$ von dem für CS_2 , kann also in den obigen Formeln ganz vernachlässigt werden, so daß man erhält:

$$(7) \quad \frac{l(n_a - n)}{\lambda} = \frac{l(n_o - n)}{\lambda} = \frac{(k-1)(k+2)(n^2-1)(n^2+2) C}{144 \pi n \lambda} E^2 l.$$

In der Tat zeigt denn Hexan auch keinen Unterschied für senkrecht und parallel zum Kraftfelde polarisiertes Licht. Das kann man nachweisen durch Beobachtungen mit einem Nicol in zwei zueinander senkrechten Stellungen, das kann man aber auch daraus ersehen, daß man mit natürlichem Lichte dieselben Resultate erhält, wie mit geradlinig polarisiertem. Ein Undeutlichwerden, Verschwinden und Wiedererscheinen, wie es oben infolge der elektrischen Doppelbrechung bei Benützung von natürlichem Lichte z. B. bei CS_2 beobachtet werden konnte, trat nie ein, die Streifen blieben vollkommen scharf, zeigten beim Aufladen der Kerr-Zelle eine kleine Verschiebung und im Moment der Entladung den Sprung zurück in die Ruhelage.

Es wurde nun versucht, die Funkenlänge am Funkenmikrometer zu bestimmen, welche einer Streifenverschiebung bzw. einem Sprung von 0,1 und 0,2 entsprach. Es ergaben sich hierfür 6,2 und 9,1 mm. Das entspricht bei 3,08 mm Plattenabstand Feldstärken von 238 und 326 und es zeigt sich zunächst mal, daß die Proportionalität mit dem Quadrat der Feldstärke vorhanden ist. Setzt man diese Werte in die Formel (7) ein und weiter

$$\lambda = 546 \cdot 10^{-7}, \quad k = 1,85, \quad n = 1,877, \quad C = 159 \cdot 10^{-6},$$

alle Größen auf die Beobachtungstemperatur von 23° bezogen, so berechnet sich die Größe der Elektrostriktion zu 0,135 statt des beobachteten 0,1 λ .

Die Beobachtungen sind mehrfach wiederholt, im vorigen Sommer ist reinstes Hexan von Kahlbaum, jetzt solches von Merck benutzt; immer war der beobachtete Wert $2/3$ bis $3/4$ des berechneten. Die der Berechnung zugrunde liegende Annahme, daß $k = n^2$, ist mit genügender Annäherung erfüllt. Ob aber die für k und C den Tabellen von Landolt und Börnstein entnommenen Werte vielleicht mit nicht zu vernach-

lässigen Fehlern behaftet sind, darüber habe ich kein Urteil. Andere Substanzen, die genügende Isolation bei gleichzeitig sehr kleiner Kerr-Konstante besitzen und für welche k , n und C bekannt sind, standen mir zurzeit nicht zur Verfügung. Sollte es sich bestätigen, daß in den oben angegebenen Formeln (5) und (6) die Elektrostriktion nur mit etwa $\frac{3}{4}$ des berechneten Wertes in Ansatz gebracht werden darf, so würden dadurch die Beobachtungen der Orientierungstheorie nähergebracht werden, nicht aber der Voigtschen Theorie.

Man erhält dann aus den Langevin-Enderleschen Formeln

$$\text{für } \text{CS}_2: \frac{(n_a - n)l}{\lambda} = 0,333 + 0,125 = 0,458 \text{ statt } 0,4,$$

$$\frac{(n_o - n)l}{\lambda} = -0,167 + 0,125 = -0,042 \text{ statt } -0,1.$$

Für $\frac{n_a - n}{n_o - n}$ ergibt sich dann der Wert -11 statt des beobachteten -4 .

Dabei ist zu beachten, daß wegen des kleinen Wertes im Nenner ein geringer Fehler einen sehr großen Einfluß auf den Wert des Bruches haben muß.

Nach der Voigtschen Theorie würde sich ergeben

$$\frac{l(n_a - n)}{\lambda} = 0,75 + 0,125 = 0,875 \text{ statt } 0,4,$$

$$\frac{l(n_o - n)}{\lambda} = 0,25 + 0,125 = 0,375 \text{ statt } -0,1.$$

Für $\frac{n_a - n}{n_o - n}$ ergibt sich $2,3$ statt -4 .

Ganz gleiche Beobachtungen wie mit Hexan sind mit gleichem Erfolge auch mit Petroläther ausgeführt und es ist vielleicht nicht uninteressant, darauf hinzuweisen, daß es durch diese Versuche gelungen ist, das Vorhandensein der Elektrostriktion sicher nachzuweisen.

VIII.

Bei den Beobachtungen mit Schwefelkohlenstoff, Chlorbenzol und Rizinusöl wurde zuerst immer die Feldstärke be-

stimmt, für welche $\frac{(n_a - n_o)l}{\lambda} = 0,5$ und dann wurden die Größen $\frac{(n_a - n)l}{\lambda}$ und $\frac{(n_o - n)l}{\lambda}$ bestimmt. Die erste Messung läßt sich mit großer Schärfe ausführen, wie oben angegeben dadurch, daß das Verschwinden der Interferenzstreifen beobachtet wird. Bei dieser Beobachtung ist man ganz unabhängig davon, ob die Streifen ganz unbeweglich feststehen, oder ob infolge irgendwelcher Störungen — kleinste Luftbläschen oder Staubpartikelchen — eine minimale Unruhe in der Flüssigkeit vorhanden ist. Ganz anders bei der Abschätzung der Sprünge 0,4 und $-0,1\lambda$.

Ob der Sprung 0,4 oder 0,45 oder ob er 0,1 oder 0,05 läßt sich wohl mit ausreichender Sicherheit entscheiden, nicht aber, ob er 0,42 und 0,08 und es schien mir nicht überflüssig, mir sozusagen ein objektives Urteil über die hierbei erzielte Meßgenauigkeit zu verschaffen. Hierzu wurden die Versuche in folgender Weise ausgeführt. Mit Hilfe der Mikrometerschraube des Kompensators am Interferometer wurden die oberen und unteren Streifen, vgl. Fig. 5, so eingestellt, daß die einen gerade die Verlängerung der anderen bildeten. Dann wurde das Potential der einen Platte der Kerr-Zelle langsam gesteigert und fortgesetzt durch Arbeiten mit der Mikrometerschraube dafür gesorgt, daß die Streifen senkrecht übereinander waren. War das gewünschte Potential erreicht, sprang also der Funke über, so wurde die Trommel der Mikrometerschraube abgelesen.

Es ergaben sich hierbei die Ablesungen in Skalenteilen:

7,—	6,5	5,—	7,—	6,—	6,5	6,—	Mittel	6,3
6,—	6,5	5,5	6,—	6,—	6,5	5,5	„	6,—
6,3	5,7	5,—	5,7	7,—	6,—	4,5	„	5,7
6,—	6,5	7,—	6,—	4,5	5,—	5,5	„	5,8

Die größte Abweichung einer einzelnen Beobachtung vom Hauptmittel beträgt also nicht 5 Proz.; ich glaube deshalb sicher zu sein, daß die obenstehenden Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung nicht aus Beobachtungsfehlern erklärt werden können, sondern daß wirklich auch dann noch eine Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung bestehen

bleibt, wenn man die Elektrostriktion nur mit $\frac{3}{4}$ des berechneten Wertes in Ansatz bringt.

Mit Hilfe der oben gegebenen Formeln kann man leicht berechnen, daß bei allen bisher auf elektrische Doppelbrechung untersuchten Substanzen Elektrostriktion und elektrische Doppelbrechung von derselben Größenordnung sind. Ich habe auch nicht eine Substanz gefunden, bei welcher die Elektrostriktion so gering ist, daß sie in erster Annäherung gegen die elektrische Doppelbrechung vernachlässigt werden könnte und es wird deshalb eine sichere Entscheidung über die elektrische Doppelbrechung auf diesem Wege erst dann möglich werden, wenn zuverlässige quantitative Beobachtungen über die Größe der Elektrostriktion vorliegen.

IX.

Bei den mannigfachen Versuchen, welche ich angestellt habe, um eine Erklärung für die Differenz zwischen Beobachtung und Theorie sowie auch zwischen den Resultaten von Aeckerlein und denjenigen meiner Versuche zu finden, bin ich auf eine Erscheinung gestoßen, welche wohl geeignet sein dürfte, wenigstens die letztgenannte Differenz zu erklären.

Die Versuche mit Äthyläther haben, wie schon erwähnt, keine zuverlässigen Resultate ergeben, weil das Isolationsvermögen der Flüssigkeit nicht genügte. Die Kerr-Zelle konnte nicht langsam aufgeladen werden, ohne daß sich die Interferenzstreifen verzerrten. Die Beobachtungen konnten nur in der Weise ausgeführt werden, daß man sehr schnell die Spannung steigerte, dann beim Überspringen des Funks den Sprung der Streifen beobachtete. Hierbei machte ich die Beobachtung, daß das Verhältnis $\frac{n_a - n}{n_o - n}$ verschiedene Werte annahm, je nachdem es durch die verschiedenen angewendeten Reinigungsverfahren der Substanz gelungen war, eine besser oder weniger gut isolierende Flüssigkeit zu erhalten, d. h. mit anderen Worten: es schien die Leitfähigkeit der benutzten Substanz nicht ohne Einfluß auf die erhaltenen Werte zu sein.¹⁾

1) Ich bin meinem Kollegen Gattermann zu großem Danke verpflichtet für die Freundlichkeit, mit der er die verschiedensten bei dieser Untersuchung benötigten Substanzen auf das sorgfältigste für mich hat reinigen lassen.

Um hierüber Gewißheit zu erhalten, untersuchte ich Mischungen aus Hexan oder Petroläther und Nitrobenzol. Die beiden erstgenannten Substanzen sind vorzügliche Isolatoren, haben aber sehr kleine Kerr-Konstante, Nitrobenzol dagegen hat eine sehr große Kerr-Konstante, zeigt aber merkliche Leitfähigkeit. Setzt man zu Hexan sehr kleine Mengen Nitrobenzol, 1—2 Proz., so erhält man ein Gemisch, das sehr gut isoliert, gleichzeitig aber schon eine Doppelbrechung zeigt, die der des CS_2 gleichkommt. Eine solche Mischung zeigt nun genau dasselbe Verhalten, wie CS_2 . Für $\frac{n_a - n}{n_o - n}$ ergibt sich der Wert —4. Die Schärfe der Beobachtung läßt gar nichts zu wünschen übrig. Erhöht man nun ganz allmählich den Prozentgehalt an Nitrobenzol und bestimmt für jede neu hergestellte Mischung den Wert von $n_a - n$ und $n_o - n$ stets für eine solche Feldstärke, für die $n_a - n_o = \frac{1}{2} \lambda$, so beobachtet man, daß $n_a - n$ mit zunehmender Konzentration ganz allmählich kleiner und $n_o - n$ entsprechend größer wird, so daß z. B. eine 5prozentige Lösung ergibt:

$$\frac{n_a - n}{n_o - n} = \frac{3,5}{-1,5} = -2,3$$

bei einer 6prozentigen Lösung erhält man —1,5. Bis zu diesem Prozentgehalt ist die Isolation noch so gut, daß man die Verschiebung der Interferenzstreifen bei langsamer Aufladung der Kerr-Zelle und die plötzlichen Sprünge bei Funkenentladung sicher beobachten kann. Bei weiter zunehmender Konzentration wird die Beobachtung schwieriger, aber es gelingt immerhin, die Messungen bis zu einer 10prozentigen Lösung fortzusetzen, bei der nun sowohl bei parallel als senkrecht zu den Kraftlinien polarisiertem Lichte die Verschiebung der Interferenzstreifen nach derselben Seite erfolgt und man

$$l(n_a - n) = -2, \quad l(n_o - n) = -7, \quad \text{mithin für } \frac{n_a - n}{n_o - n} = +\frac{2}{7}$$

findet.

Ohne auf die Einzelheiten dieser Versuche näher einzugehen, möchte ich jetzt nur darauf hinweisen, daß sie genau so verlaufen, als wenn zu der elektrischen Doppelbrechung B und der Elektrostriktion El ein mit zunehmender Leitfähigkeit

wachsendes Glied S hinzuträte, so daß man die Formeln (5) schreiben könnte:

$$\frac{l(n_a - n)}{\lambda} = 2/3 B + El - S$$

$$\frac{l(n_o - n)}{\lambda} = -1/3 B + El - S,$$

oder nach Voigt;

$$\frac{l(n_a - n)}{\lambda} = 3/2 B + El - S$$

$$\frac{l(n_o - n)}{\lambda} = 1/2 B + El - S.$$

Daß es sich bei diesem S zum Teil wenigstens um Stromwärme handelt, geht wohl schon daraus hervor, daß, wenn man das Potential an den Kondensatorplatten nicht langsam steigert, sondern plötzlich in gewünschter Höhe anlegt, man auch bei der 10prozentigen Mischung noch deutlich ein Springen des einen Streifensystems nach links, des andern nach rechts beobachten kann. Ich wollte hier nur darauf hinweisen, daß diese Erscheinung möglichenfalls bei den Versuchen Aeckerlein eine Rolle gespielt haben kann und hierin vielleicht die Erklärung zu suchen ist, daß er für $\frac{n_a - n}{n_o - n}$ den Wert -2 erhalten hat, statt des von mir gefundenen -4 .

Aeckerlein gibt nämlich an, daß, wenn er die elektrischen Schwingungen mehrere Sekunden einwirken ließ, eine Verschiebung und Verzerrung der Interferenzstreifen durch Konvektionsströme eingetreten sei und ich kann diese Beobachtungen auf Grund von Versuchen, die ich mit ungedämpften Schwingungen anstelle, nur bestätigen. Bei den Versuchen, welche ich mit CS_2 unter Benützung der Gleichspannung der Elektrisiermaschine ausführte, war das nicht der Fall. Trotzdem wird man sich aber fragen können, ob diese Größe S nicht doch möglichenfalls bei diesen Versuchen noch einen Einfluß gehabt haben kann. Groß kann er sicher nicht gewesen sein, denn die Mischungen von Hexan mit Nitrobenzol, bei denen sich zuerst ein Einfluß des S nachweisen ließ, hatten eine wesentlich höhere galvanometrisch bestimmte Leitfähigkeit, als der CS_2 . Andererseits ist beachtenswert, daß ein Einfluß

des S bei diesen Versuchen dahin wirken müßte, eine bessere Übereinstimmung der Beobachtungen mit den Langevin-Enderleschen Rechnungen herbeizuführen. Ein Wert $S=0,05$ würde schon eine vollständige Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment bewirken.

Der Freiburger Wiss. Ges. bin ich zu großem Danke verpflichtet für die Bewilligung der zu der Beschaffung des Interferometers und der Hochfrequenzmaschine erforderlichen Mittel.

Freiburg i. Br., Juni 1915.

(Eingegangen 21. Oktober 1915.)

5. **Über wahre Absorption der Kanalstrahlen;**
von W. Wien.

(Aus dem physikalischen Institut der Universität Würzburg.)

Genaue Messungen der Absorptionskoeffizienten von Kanalstrahlen gehören zu den schwierigsten, obwohl es zunächst den Anschein hat, als ob ihre Bestimmung recht einfach sei. Man kann sogar zweifeln, ob wirklich befriedigende Messungen mit den heutigen Hilfsmitteln ausführbar sind.

Bei der Absorption der Kanalstrahlen muß unterschieden werden zwischen der Schwächung eines Strahlenbündels durch Zerstreuung und durch wirkliche Absorption. Die erstere Wirkung besteht nur in einer Änderung der Richtung eines fliegenden Massenteilchens, während es bei der eigentlichen Absorption, die wir die *wahre Absorption* nennen wollen, seine Geschwindigkeit und damit seine Zugehörigkeit zu den Strahlen ganz verliert. Die wahre Absorption der Kanalstrahlen ist von besonderem Interesse, weil wir hier eine Wirkung einer bestimmten Art von Zusammenstößen von Massenteilchen vor uns haben und Schlüsse auf den Mechanismus dieser für die ganze Molekulartheorie so überaus wichtigen Vorgänge ziehen können.

Bisher ist die wahre Absorption noch kaum der Beobachtung zugänglich gemacht worden, weil meistens die Zerstreuung, also ein ganz anderer Vorgang, beteiligt war.

Wenn man sich der photographischen Schwärzung als Maß für die Kanalstrahlenintensität bedient, so ist es sehr schwierig, die wahre Absorption zu beobachten, selbst wenn man mit Kanalstrahlen experimentiert, die in bezug auf Masse und Geschwindigkeit ganz einheitlich sind. Denn bei der Zerstreuung werden die Strahlenbündel und daher die photographische Wirkung auf einen größeren Querschnitt ausgebreitet. Man müßte also das Flächenintegral der photographischen Schwärzung beobachten, was zwar nicht unmöglich, aber doch recht schwierig sein dürfte.

Wenn man sich der Wärmewirkung bedient, ist die Aufgabe viel leichter, solange die Empfindlichkeit ausreicht. Man hat dann nur die Fläche der Thermosäule so groß zu wählen, daß immer das ganze Strahlenbündel, auch nach seiner Verbreiterung durch Zerstreuung, aufgefangen wird. Wenn die Wärmeleitung des Thermoelements genügend groß ist, so ist die Temperaturerhöhung der Lötstelle davon unabhängig, ob die auffallenden Strahlen eine größere oder kleinere Fläche treffen. Auf diese Weise läßt sich die wahre Absorption messen.

Hr. H. Heyder hat im Würzburger physikalischen Institut nach dieser Methode Absorptionsmessungen gemacht.

Das Thermoelement ist dem von Rüchardt¹⁾ benutzten ähnlich. An die vier Ecken eines quadratischen dünnen Kupfer- oder Silberblechs werden je zwei Manganin- und Konstanten-drähte gelötet, die das Blech in der Schwebé halten. Die Konstanten- und Manganindrähte werden an zwei Messingklötze gelötet. Die Wärmeableitung des Blechs ist ger.ing, infolgedessen die Empfindlichkeit hoch, diese aber vom Gasdruck abhängig. Ein solches Thermoelement wurde an einem Eisen-zylinder befestigt, der in der Röhre vermittelst einer außen verschiebbaren, vom Strom durchflossenen Spule magnetisch ver-schiebbar war. Auf diese Weise war es leicht, die Entfernung der Thermosäule von der durchbohrten Kathode zu verändern. Durch einen in den Kanal der Kathode eingesetzten Hahn, der durch einen Schliff gedreht werden konnte, ließen sich die Strahlen abschirmen, so daß die Nullage des mit dem Thermo-element verbundenen Galvanometers leicht bestimmt werden konnte.

Mit diesem Thermoelement lassen sich Bestimmungen der wahren Absorption der Kanalstrahlen ausführen. Es wird zu-nächst die Nullage des Galvanometers abgelesen, dann läßt man die Kanalstrahlen auf das Thermoelement fallen, mißt den Ausschlag, verschiebt das Thermoelement um eine ge-messene Strecke und beobachtet wieder den Ausschlag. Wenn die Fläche des Thermoelements groß genug ist, daß alle Kanal-strahlen in beiden Stellungen völlig aufgefangen werden, so kann die Zerstreuung der Strahlen keinen Fehler hervor-bringen.

1) E. Rüchardt, Ann. d. Phys. 45. p. 1070. 1914.

Obwohl diese Methode grundsätzlich den richtigen Absorptionskoeffizienten α zu bestimmen gestattet, ist sie doch noch weit entfernt, wirklich befriedigende Ergebnisse zu erreichen. Zunächst versagt sie für kleine Werte von α . Die zeitliche Gleichmäßigkeit der Strahlen ist nicht ausreichend, um so genaue Messungen zu ermöglichen, daß kleine Unterschiede in den beiden Stellungen der Thermosäule sicher gemessen werden könnten. Bei kleinen Absorptionen kommt man leicht zu ganz fehlerhaften Ergebnissen. Auch sonst werden die Beobachtungen infolge der Schwankungen des Entladungsstroms sehr ungenau.

1. **Methode und Versuchsanordnung.**

Ich will hier eine Abänderung der Methode mitteilen, welche die Fehler, die durch die Veränderlichkeit der Stromquelle bedingt sind, vermeidet und deshalb auch kleine Werte von α zu messen gestattet. Es soll indessen gleich darauf hingewiesen werden, daß auch auf diese Weise immer noch keine befriedigenden Bestimmungen von α möglich sind. Es liegt das daran, daß in dem gewöhnlich benutzten Kanalstrahlenbündel sehr verschiedene Geschwindigkeiten und auch verschiedene Massenteilchen vorkommen. Die Zusammensetzung des Bündels ist überdies Veränderungen unterworfen. Man erhält also für α nur gewisse Mittelwerte, die von jener Zusammensetzung abhängig sind. Hieraus erklärt sich, daß man gar nicht zu wirklich übereinstimmenden Ergebnissen unter scheinbar gleichen Bedingungen gelangen kann.

Die mitgeteilten Messungen haben daher nur vorläufigen Wert. Man kann aus ihnen die Größenordnung der wahren Absorption entnehmen. Außerdem zeigen sich in ihnen Eigentümlichkeiten, die als Hinweis für die Richtung dienen können, welche bei späteren genaueren Untersuchungen einzuschlagen ist. Bei solchen Untersuchungen muß durch gleichzeitige magnetische und elektrische Ablenkung ein in bezug auf Geschwindigkeit und Masse homogenes Strahlenbündel gewonnen und untersucht werden. Die auf Benutzung des Thermoelements gepründete Methode wird allerdings wegen der zu geringen Empfindlichkeit vielleicht nicht anwendbar sein, wenn es nicht gelingt die Stromquellen für Kanalstrahlen erheblich zu verstärken. Hierin liegt die große Schwierigkeit der Messungen, auf die ich oben hingewiesen habe.

Die benutzte Versuchsanordnung zeigt Fig. 1. Es werden zwei Thermoelemente benutzt, T_1 und T_2 . Das erstere ist in einer zur Rohrachse senkrechten, das zweite in paralleler Richtung verschiebbar. Man kann durch Verschiebung von T_1 einen beliebig großen Teil der Kanalstrahlen auffangen, die übrigbleibenden fallen dann entweder ganz auf T_2 oder es kann durch eine Blende B aus ihnen noch ein zentraler Teil ausgeschnitten werden. Diese Blende hat nur den Zweck zu kontrollieren, ob alle Strahlen tatsächlich auf B auf-

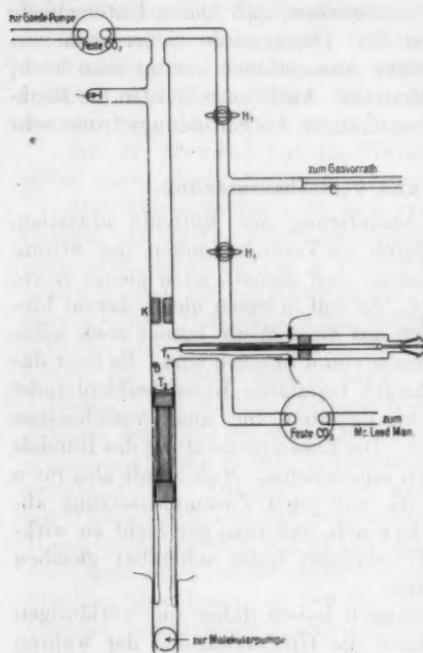


Fig. 1.

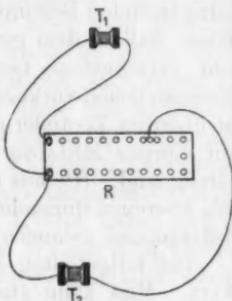


Fig. 2.

fallen. Dies ist der Fall, wenn das Einsetzen der Blende keinen Einfluß auf die Messungsergebnisse hat. Die beiden Thermoelemente werden nun in die bekannte Widerstandskombination geschaltet, die für die Vergleichung der Spannungen galvanischer Elemente benutzt wird und unter dem Namen Kompensationsmethode bekannt ist (Fig. 2). Der Rheostat R ist mit dem Thermoelement T_1 verbunden und T_2 von einem geeigneten Widerstand von R abgezweigt. Gewöhnlich war der Widerstand von R einige 30 Ohm, der Teil von dem die Abzweigung nach T_2 führt, 10—20 Ohm. Gewöhnlich wurde T_1 etwas

stärker bestrahlt als T_2 . Man hat dann alle Vorteile der Nullmethode, dann aber noch den besonderen, daß Schwankungen der Intensität der Kanalstrahlen die auf T_1 und die auf T_2 fallenden Strahlen in gleicher Weise treffen. Man ist daher von den Schwankungen des Entladungsstromes fast ganz unabhängig. Nur wenn die Verteilung der Kanalstrahlen in dem Bündel verändert wird, kann die Schwankung die Messung beeinflussen. Aber auch diese kann fast ganz beseitigt werden, wenn T_1 gerade die Hälfte des Kanalstrahlenbündels abblendet und auf die Blende B verzichtet wird. Dann können nur noch solche Schwankungen der Kanalstrahlen Fehler hervorrufen, bei denen die beiden gleichen Hälften des Bündels verschieden betroffen werden. Diese sind gering und jedenfalls sehr klein gegenüber den Gesamtschwankungen in der Intensität der Kanalstrahlen.

Um die Absorption bei verschiedenen Drucken zu beobachten, wurden ähnlich wie bei meinen früheren Untersuchungen zwei Pumpen benutzt. Entweder die mit dem Entladungsrohr verbundene rotierende Gaedesche Quecksilberpumpe oder die unmittelbar an den Beobachtungsraum angegeschlossene Molekularpumpe von Gaede. Im ersten Falle war der Hahn H_2 geschlossen, H_1 offen. Dann strömte das Gas durch die Kapillare C von dem Vorratsgefäß in den Beobachtungsraum, von dort durch die Kathode in den Entladungsraum. Dann war der Druck im letzteren niedriger als im Beobachtungsraum. Wenn andererseits die Molekularpumpe benutzt wurde, war H_1 geschlossen, H_2 offen. Dann strömte das Gas zunächst in den Entladungsraum und durch die Kathode in den Beobachtungsraum. Dann war im letzteren wegen der stark wirkenden Molekularpumpe der Druck erheblich niedriger. Der Durchmesser der Durchbohrung in der Kathode war 3 mm. Die Länge der Kathode 6 cm. Große Sorgfalt wurde darauf verwendet, die Dämpfe zu beseitigen. Sowohl die Verbindungen zur Quecksilberpumpe wie zum Mac Leodschen Manometer, das zur Druckmessung verwendet wurde, gingen durch eine Mischung von fester Kohlensäure und Aceton.

Wenn die Molekularpumpe in Wirksamkeit trat, so sorgt diese auch für die Entfernung der Dämpfe.

Bei der Messung wurde zunächst die Nullage des Galvanometers bei nicht bestrahlten Thermoelementen festgestellt,

dann bei Bestrahlung die Widerstände so abgeglichen, daß das Galvanometer wieder in die Ruhelage kam. Man erhält dann die Spannung der Thermosäule T_2 in der Stellung I zu der Thermosäule T_1 : e_1/E .

Nun wird T_2 um 5 cm durch die Verschiebung der magnetisierenden Spule zurückgeschoben und wieder das Verhältnis der Spannungen beobachtet (Stellung II): e_2/E .

Nun ist e_1 proportional der Strahlen in I, die wir J_0 nennen. e_2 ist proportional J in Stellung II; dann ist

$$(1) \quad J = J_0 e^{-\alpha x}, \quad e^{-\alpha x} = \frac{J}{J_0} = \frac{e_2}{e_1},$$

woraus sich α berechnet.

2. Ergebnisse.

Man kann keine genaue Gültigkeit der Gleichung I erwarten, weil, wie bereits gesagt, α bei dem Strahlengemisch nicht einheitlich ist. Trotzdem ergeben sich bei verschiedenen x keine großen Abweichungen von α , wobei allerdings bemerkt werden muß, daß α bei den benutzten Drucken klein war. Auch ergaben sich keine andern Werte von α , wenn die Messung in einer um 8 cm größeren Entfernung ausgeführt wurde. Solche Beobachtungen kann man aus Tabelle I entnehmen.

Tabelle I.
Stickstoff.
Absorptionskoeffizienten α als Funktion der Entfernung.

Entfernung von der Kathode	
5 cm	13 cm
0,047	0,033
0,023	0,027
0,023	0,027
0,023	0,026
0,020	0,026
0,030	0,033
0,017	0,017
0,023	0,033
0,023	0,030
0,023	0,030
0,020	0,020
0,035	0,040
seitlicher	zentraler
Kanalstrahl	
0,033	0,030

Hier sind die Absorptionskoeffizienten in zwei verschiedenen Entfernungen von der Kathode angegeben. Die Unterschiede sind nicht größer als die Schwankungen der einzelnen Beobachtungen selbst. Auch zeigt die Tabelle denselben Wert der Absorption, wenn durch die Thermosäule I das zentrale Strahlenbündel ganz abgeblendet war und die Messung in den diffusen Randgebieten der Strahlen vorgenommen wurde.

In den Tabellen II und III sind Beobachtungen bei verschiedenen Drucken für Sauerstoff und Stickstoff enthalten.

Tabelle II.

Absorption bei verschiedenem Druck.

Absorptionskoeffizient α cm^{-1}	Druck D mm Hg	Spannung Volt	$\frac{\alpha}{D}$
0,033	0,0019	4700	17,4
0,026	0,0016	4700	16,2
0,017	0,0017	6500	10,0
0,017	0,0017	6500	10,0
0,027	0,038	14400	0,7
0,020	0,038	14400	0,52
0,040	0,030	4700	1,32
0,033	0,043	11400	0,76

Trotz den Schwankungen, welche auch diese Beobachtungen zeigen, fällt sogleich auf, daß der Absorptionskoeffizient nicht dem Druck proportional ist. Wäre dies der Fall, so müßte α/D vom Druck unabhängig sein. Statt dessen ist α/D für niedrige Drucke erheblich größer. Die Abweichung ist so groß, daß sie nicht durch Beobachtungsfehler erklärt werden kann. Man wird zunächst an zwei Möglichkeiten denken. Erstens, daß trotz der praktischen Beseitigung des Hg-Dampfs durch Kühlung und trotz der Wirkung der Molekularpumpe noch Dämpfe im Beobachtungsraum vorhanden waren, die sich bei der Druckmessung nicht zeigten. Es ist das indessen wenig wahrscheinlich, da ein übrigbleibender Dampfdruck unter den verschiedenen Beobachtungsbedingungen keinen so unveränderlichen Wert gehabt haben würde. Die zweite Möglichkeit ist eine Abhängigkeit der Zusammensetzung der Kanalstrahlen vom Druck. Wenn die Atomstrahlen weniger absorbierbar sind als die Molekülstrahlen und letztere bei niedrigem Druck verhältnismäßig stärker vertreten sind, so könnte die beobachtete

Tabelle III.
Sauerstoff.

Absorptionskoeffizient α cm^{-1}	Druck D mm	Spannung Volt	$\frac{\alpha}{D}$	
0,050	0,020	11400	2,5	
0,036	0,020	10000	1,8	Blende
0,035	0,023	9800	1,62	Blende
0,052	0,021	13500	2,48	
0,052	0,021	12900	2,48	
0,055	0,024	12900	2,28	
0,050	0,026	12900	1,92	
0,055	0,022	13500	2,5	
0,056	0,022	13500	2,55	
0,052	0,024	12000	2,16	
0,055	0,024	12800	2,30	
0,030	0,014	12900	2,15	
0,030	0,013	12900	2,31	
0,035	0,012	12500	2,91	
0,030	0,012	12900	2,5	
0,022	0,014	13100	1,56	Blende
0,022	0,010	19000	2,20	Blende
0,020	0,010	19000	2,00	Blende
0,012	0,0012	12800	10,00	
0,012	0,0012	12800	10,00	
0,017	0,0015	7500	11,30	
0,017	0,0015	7500	11,30	
0,010	0,0012	19000	8,30	
0,012	0,0012	17500	10,00	
0,016	0,0016	7500	10,00	
0,016	0,0016	7500	10,00	Blende
0,016	0,0016	19000	11,60	Blende
0,011	0,0012	19000	9,20	Blende

Abweichung von der Proportionalität erklärt werden. Diese Abweichung ist ganz analog bei der von Zusammenstößen anderer Art bewirkten Umladung, bei der die freie Weglänge der Kanalstrahlen auch dem Druck nicht umgekehrt proportional ist.¹⁾

Die der wahren Absorption im Sauerstoff entsprechende freie Weglänge ergibt sich aus Tabelle III bei einem Druck von 0,02 mm gleich $1/\alpha = 20 \text{ cm}$. Bezogen auf einen Druck von 760 mm würde, Proportionalität vorausgesetzt, $L = 1/1900$ sein, also etwa 50 mal größer als die freie Weglänge der kinetischen Gastheorie.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 39. p. 536. 1912.

Früher hatte sich die freie Weglänge für die Absorption durch Auffängerbeobachtungen für Wasserstoff 160 mal größer als die freie Weglänge der Gastheorie ergeben¹⁾ bei einem Druck von 0,06 mm.

Die freie Weglänge der Umladungen hatte sich von derselben Größenordnung wie die der kinetischen Gastheorie gezeigt.

Für eine genaue Feststellung wird es indessen erforderlich sein, die Beobachtungen an Kanalstrahlen anzustellen, die einheitlich sind in Geschwindigkeit und Masse.

Würzburg, November 1915.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 23. p. 437. 1907.

(Eingegangen 6. November 1915.)

6. Zur Theorie der Zustandsgleichungen; von M. v. Smoluchowski.

Unter obigem Titel hat M. B. Wagner in diesen Annalen eine Arbeit¹⁾ veröffentlicht, deren Hauptzweck der Nachweis ist, daß van der Waals, Boltzmann, Kuenen und alle anderen Autoren, welche die Wirkung der molekularen Anziehungs-kräfte durch Einführung eines inneren Druckes a/v^2 ersetzen, in einem Irrtum befangen waren, indem sich bei korrekter Berechnung unter den van der Waalschen Voraussetzungen vielmehr eine Zustandsgleichung von der Gestalt:

$$(1) \quad p v = r T e^{-\frac{f(v)}{r T}} \left[1 + \frac{b}{v} e^{-\frac{f(v)}{r T}} + \dots \right]$$

ergebe. Insbesondere richtet sich die Spitze jener Ausführungen gegen Boltzmann, welcher bei seinen Bestrebungen, die Ableitung der van der Waalsschen Gleichung in möglichst präziser Form zu geben, gewisse Fehler begangen haben soll.

Nun glaube ich, daß diese schweren Vorwürfe auf Mißverständnisse zurückzuführen sind, und daß die herkömmliche Auffassung vollkommen zu Recht besteht. Gewisse, bei der Begründung jener Gleichung zutage tretende Schwierigkeiten verdienen aber vielleicht tatsächlich eine eingehendere Analyse, als meistens üblich ist, und deshalb scheint es mir nützlich, die Sachlage behufs Klarlegung der Einwände Wagners in möglichst einfacher Weise kurz auseinanderzusetzen.

Um das Wesentliche hervortreten zu lassen, seien von vornherein Punktmoleküle angenommen, wodurch die Eigenvolum-Korrektion wegfällt. Als Druck des Gases ist nun nach Wagner die Bewegungsgröße anzusehen, welche die Molekularstöße auf eine unendlich dünne Wand übertragen, welche das Gas gegen den leeren Raum abgrenzt; somit ist in bekannter Weise der Druck:

$$(2) \quad p = \frac{n_w m e^3}{3},$$

1) M. B. Wagner, Ann. d. Phys. 45, p. 1169. 1914.

wobei n_w die Molekülzahl bedeutet, welche in der unmittelbar der Wand anliegenden Schicht pro Volumeinheit enthalten ist. Letztere Molekülzahl ist aber nicht mit der im Inneren des Gasraumes (Wagners „Stoffkern“) pro Volumeinheit entfallenden Zahl n_0 identisch, da die Gasdichte in den Grenzschichten mit Annäherung an die Wand abnimmt. Und zwar ist zufolge des bekannten Boltzmannschen e^{-2hx} -Satzes die Molekülzahl in der Entfernung x von der Wand:

$$(3) \quad n(x) = n_0 e^{-2hx} \int_0^\infty F(\xi) d\xi$$

wo $F(\xi)$ die nach dem Gasinneren gerichtete Resultante der Kohäsionskräfte bedeutet, welche auf ein im Abstande ξ von der Wand befindliches Molekül seitens der übrigen Gasmoleküle ausgeübt werden. Führt man für die zum Transport eines Moleküls vom Inneren an die Wand erforderliche Arbeit die Abkürzung ein:

$$\int_0^\infty F(\xi) d\xi = A,$$

so geht also (2) mit Rücksicht auf (3) und die Relationen

$$e^2 = 3 \pi T, \quad 2h = \frac{N}{RT}$$

über in

$$(4) \quad p = \frac{rT}{v} e^{-\frac{N}{RT} A}.$$

Soweit ist also Wagners Ableitung¹⁾ ganz richtig, aber unbedingt ist dessen Ansicht, daß A bloß eine Funktion des spezifischen Volums v sei, da ja die Kräfte $F(\xi)$ im allgemeinen von der Molekülverteilung in den Wandschichten, also der Veränderlichkeit der $n(\xi)$ abhängen und letztere durch die in h enthaltene Temperatur mit bestimmt wird.

Betrachten wir diese Verteilung etwas näher. Durch Differentiation von (3) erhält man

$$(5) \quad \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} = 2h F(x),$$

was mit der aerostatischen Grundgleichung identisch ist. Nun läßt sich $F(x)$ in die Anziehungskräfte zerlegen, welche das

1) Unsere Bezeichnungsweise weicht etwas von jener Wagners ab und schließt sich mehr an Boltzmann an.

in x befindliche Molekül seitens der in verschiedenen Entfernungen ξ von der Wand befindlichen Gasschichten (von der Dicke $d\xi$) erfährt. Dieselben lassen sich in der Form $n(\xi) \Psi(\xi - x) d\xi$ ausdrücken, wo die Funktion Ψ bloß von der Gestalt des Kraftgesetzes abhängt; dieselbe ist natürlich eine unpaare Funktion und muß im Sinne der Boltzmannschen Voraussetzungen als in einem relativ großen Wirkungsbereich¹⁾ $|\xi - x| < \varrho_2$ wenig veränderlich, aber für makroskopische Entfernungen als verschwindend klein von hoher Größenordnung angenommen werden. Die Verteilung der Moleküle ist also durch die Differential-Integralgleichung bestimmt:

$$(6) \quad \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} = 2h \int_0^\infty n(\xi) \Psi(\xi - x) d\xi.$$

Ohne in eine genauere Analyse derselben einzugehen, kann man ein für unseren Zweck genügendes Resultat ableiten, indem man mit n multipliziert und nach $d x$ zwischen den Grenzen Null und x integriert, wodurch sich ergibt:

$$(7) \quad n(x) - n_w = 2h \int_0^x \int_0^\infty n(x) n(\xi) \Psi(\xi - x) dx d\xi.$$

Nun verschwindet aber offenbar die Resultierende der Kohäsionskräfte aller zwischen 0 und x gelegenen Moleküle infolge der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung:

$$\int_0^x \int_0^\infty n(x) n(\xi) \Psi(\xi - x) dx d\xi = 0$$

und es verbleibt:

$$(8) \quad n(x) - n_w = 2h \int_0^x \int_x^\infty n(x) n(\xi) \Psi(\xi - x) dx d\xi.$$

Verlegt man jetzt den Punkt x ins Innere des Gases, wo die gleichförmige Dichte n_0 herrscht, so wird

$$n_w = n_0 - 2h n_0^2 \alpha,$$

1) Boltzmann verlangt bekanntlich, daß der Bereich ϱ_2 groß sei im Verhältnis zum mittleren Molekularabstand. Eine noch etwas weiter gehende Bedingung erhält man, wenn die zufälligen Dichteschwankungen des Gases berücksichtigt werden. Vgl. M. v. Smoluchowski, Boltzmann-Festschrift, p. 626. 1904. In Wirklichkeit dürften diese Voraussetzungen wohl nicht zutreffen.

indem das Doppelintegral

$$(9) \quad \int_0^x \int_x^{\infty} \Psi(\xi - x) dx d\xi = a$$

gesetzt wird, was in (2) eingesetzt, unter Benutzung der Abkürzung $a/m^2 = a$ die übliche Formel ergibt:

$$(10) \quad p + \frac{a}{r^2} = \frac{r T}{v}.$$

Dieselbe bleibt also im Gegensatz zu Wagners Behauptung auch in der strengen Theorie gültig, welche der Veränderlichkeit der Dichte in den Grenzschichten Rechnung trägt. Da dieselbe mit (4) nicht in Widerspruch stehen kann, läßt sich nun umgekehrt für die Arbeit A die Beziehung ableiten:

$$(11) \quad A = - \frac{R T}{N} \log \left(1 - \frac{a}{r r T} \right).$$

Die Richtigkeit der Gleichung (10) läßt sich übrigens in ganz einfacher Weise auch folgendermaßen beweisen. Im Gleichgewichtszustand muß die seitens eines Gases von bestimmter Dichte auf den Flächeninhalt der umgebenden Wände ausgeübte Kraft aus thermodynamischen Gründen unabhängig sein von der Art der Wand, wie auch Wagner am Schlusse seiner Arbeit ausführt. Denken wir uns also eine Wand von erheblicher Dicke und von genau derselben Dichte und Molekularkraft, wie jene des Gases, so daß die Wand in bezug auf die von ihr ausgeübten Anziehungskräfte durch jenes Gas ersetzbar sei.

Dann bleibt die Gasdichte in den Wandschichten gleich jener im Inneren; also steht die Wand unter der Wirkung der Stoßkräfte: $\frac{n_0 m v^2}{3}$ und der entgegengesetzten, vom Gase ausgehenden Kohäsionskräfte, deren Resultante offenbar dem Quadrat der Dichte proportional ist, sonst aber nur von der Form des Kraftgesetzes abhängt [entsprechend dem Doppelintegral in (9)]. Dies ergibt sofort die Formel (10).

Boltzmann setzt sich allerdings über die Schwierigkeiten, welche die Behandlung der Grenzschichten mit sich bringt, kurz hinweg, doch scheint mir seine auf der Benutzung des Virials beruhende Ableitung¹⁾ im Gegensatz zu Wagners An-

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 152. 1898.

sicht ebenfalls ganz einwandfrei zu sein. Wird nämlich das Virial in der Form $\Sigma (x X + y Y + z Z)$ angewendet, so gibt allerdings das Innere des Gases (der Stoffkern) keinen Beitrag zu diesem Ausdruck, und es bleiben als ausschlaggebend gerade nur die durch veränderliche Dichte charakterisierten Wandschichten übrig.

Verwendet man dasselbe dagegen in der Form $\Sigma r f(r)$, so summieren sich die betreffenden Beiträge der Moleküle des Stoffkernes, und die Wandschichten kommen als verschwindend dünn gar nicht in Betracht — das ist eben der ganze Vorteil dieser von Boltzmann angenommenen Berechnungsmethode. Es sind nämlich bei der üblichen Methode der Summierung jene zwei Formen für ein von inneren Kräften beeinflußtes endliches System zwar im ganzen äquivalent, nicht aber für willkürliche abgegrenzte Teile desselben. Wagner ist somit in einem Irrtum gefangen, wenn er meint, daß $\Sigma r f(r)$ für das Gasinnere verschwinde, und damit entfällt auch sein gegen Sutherlands und Bakkers Ableitung vorgebrachter Einwand.

Das Gesagte dürfte zur Klarstellung der Sache genügen. Die Physiker, welche seit van der Waals' Abhandlung den von diesem Forscher eingeschlagenen Gedankengang sich angeeignet haben, sind dabei meistens mehr einem intuitiven physikalischen Gefühl, als ganz exakter mathematischer Überlegung gefolgt. Wir können mit Beruhigung konstatieren, daß sie von jener Intuition nicht irregeleitet worden sind.

Krakau, 15. November 1915.

(Eingegangen 25. November 1915.)

**7. Über Brownsche Molekularbewegung
unter Einwirkung äußerer Kräfte und deren
Zusammenhang mit der verallgemeinerten
Diffusionsgleichung;
von M. v. Smoluchowski.**

Im folgenden möge das Problem einer gewissen Verallgemeinerung der Formeln für Brownsche Molekularbewegung behandelt werden, welches ich in einzelnen Spezialfällen bereits anlässlich anderer Untersuchungen berührt habe.¹⁾ Während sich nämlich die bekannte, von Einstein, mir und Langevin entwickelte Theorie der Brownschen Bewegung auf den einfachsten Fall bezieht, in welchem ein Teilchen vorausgesetzt wird, das von den unregelmäßigen Molekularstößen des umgebenden Mediums, aber sonst von keinen äußeren Kräften beeinflußt wird, wollen wir nun untersuchen, wie sich die betreffenden Gesetze ändern, falls es sich um Teilchen handelt, die unter Einwirkung gegebener äußerer Kräfte stehen.

Diese Aufgabe bietet vor allem theoretisches Interesse, indem sich dabei, wie l. c. gezeigt wurde, der allmäßliche Übergang zwischen dem Stadium der ungeordneten Brownschen Bewegung und dem Geltungsbereich des Irreversibilitätsbegriffes der makroskopischen Physik mathematisch genau verfolgen läßt. Sie bietet aber auch Gelegenheit für direkte experimentelle Anwendungen, wie weiterhin gezeigt werden wird.

Stellen wir uns vor, es sei eine Schar gleichartiger, unter Einfluß der molekularen Agitation und einer Kraft $f(x)$ stehender Teilchen vorhanden, die alle zur Zeit $t = 0$ von der Abszisse $x = x_0$ ausgegangen seien. Es möge dann $W(x_0, x, t) dx$ den Bruchteil derselben bedeuten, welcher zur Zeit t auf das Intervall $x \dots x + dx$ entfällt. Da die Bewegung eines jeden

1) M. v. Smoluchowski, Bull. Acad. Cracovie p. 418. 1913; Göttinger Vorträge über kinet. Theorie der Materie p. 87. Leipzig 1914.

Teilchens ganz zufällig erfolgt, in dem Sinne, daß sie unabhängig ist von seiner Vorgeschichte¹⁾, wie auch von den Bewegungen der übrigen Teilchen, so erhält man eine allgemeine Bedingung für die Funktion $W(x_0, x, t)$, wenn man sich die Verteilung zur Zeit t aus einer auf einen früheren Zeitpunkt ϑ bezüglichen Verteilung entstanden denkt, in der Form:

$$(1) \quad W(x_0, x, t) = \int W(x_0, \alpha, \vartheta) W(\alpha, x, t - \vartheta) d\alpha,$$

wobei die Integration über die Grenzen des zur Verfügung stehenden X -Bereiches zu erstrecken ist.

Mit Hilfe dieser Integralgleichung konstruierte ich in meiner früheren Arbeit eine Lösung unseres Problems für den Fall einer elastischen Kraft $f(x) = -a x$, indem ich von der physikalisch evidenten²⁾ Tatsache ausging, daß die Funktion $W(x_0, x, \vartheta)$ sich für genügend kurze Zeitintervalle ϑ auf die gewöhnliche Formel der Brownschen Bewegung

$$(2) \quad W(x_0, x, \vartheta) dx = \frac{1}{2 \sqrt{\pi D \vartheta}} e^{-\frac{(x - x_0)^2}{4 D \vartheta}} dx$$

reduzieren muß, und daß sich bei weiterer Annäherung die Wirkung der Kraft $f(x)$ durch Einführung einer — für die Umgebung des x_0 -Punktes als konstant anzusehenden — Verschiebung des Ausgangspunktes x_0 ersetzen läßt. Bedeutet also β die Beweglichkeit des Teilchens, so gilt für entsprechend kurze ϑ die Formel

$$(3) \quad W(x_0, x, \vartheta) dx = \frac{1}{2 \sqrt{\pi D \vartheta}} e^{-\frac{[x - x_0 - \beta \vartheta f(x)]^2}{4 D \vartheta}} dx.$$

Mittels derselben erhält man durch n -mal wiederholte Integration nach (1) die Verteilung für n sukzessive Intervalle ϑ und hieraus ergibt sich mittels Grenzüberganges für verschwindende ϑ bei konstantem $n \vartheta = t$ die Lösung unseres Problems. Diese direkte Methode ist jedoch wegen der Kom-

1) Es gilt das allerdings nur für Zeiten, die wesentlich länger sind als die „mittlere Dauer der annähernd geradlinigen Bewegung“ des Teilchens; in der Praxis sind das außerordentlich kurze Zeiten und ist diese Einschränkung ohne Bedeutung.

2) Denn die Mittelwerte der Brownschen Verschiebung nehmen proportional zur Wurzel aus der Zeit ϑ ab, während die durch äußere Kräfte hervorgebrachten Verschiebungen proportional sind zu ϑ .

plikation der betreffenden Integralausdrücke in komplizierteren Fällen praktisch kaum anwendbar. Daher ist es von Interesse, daß sich die Aufgabe auch durch Lösung einer Differentialgleichung erledigen läßt, was meist viel weniger Schwierigkeiten bietet.

Es ist nämlich dem eben Gesagten zufolge leicht einzusehen, daß die Anzahl der Teilchen, welche in einem entsprechend kurzen Zeitraume Δt durch die Abszisse x hindurchtreten, sich additiv zusammensetzt aus der Diffusionsströmung und der durch die Kraft f bewirkten konvektiven Teilchenströmung, somit gegeben ist durch

$$\left[-D \frac{\partial W}{\partial x} + \beta W f(x) \right] \Delta t.$$

Berechnet man also die pro Zeiteinheit auf den Abschnitt $x \dots x + \Delta x$ entfallende Anhäufung der Teilchen, so ergibt dies die Differentialgleichung

$$(4) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial}{\partial x} [W f(x)],$$

welcher die Verteilungsfunktion W Genüge leisten muß. Dieselbe kann auch makroskopisch als Gleichung für die Diffusion einer solchen Substanz aufgefaßt werden, welche von der äußeren Kraft f beeinflußt wird, da ja der Diffusionsprozeß gerade aus der Superposition der Brownschen Bewegung der einzelnen Substanzmoleküle resultiert. Natürlich läßt sie sich auch als verallgemeinerte Wärmeleitungsgleichung interpretieren, doch ist eine solche Auffassung nur in dem Falle $f(x) = \text{const.}$ ungezwungen durchführbar, welcher die Verbreitung der Wärme in einer konvektiv in Richtung der X strömenden inkompressiblen Flüssigkeit darstellt; für andere Formen von f müßte man eine in x variable spezifische Wärme einführen, oder die Kontinuitätsgleichung aufgeben.

Zur näheren Bestimmung der Verteilungsfunktion W gehört natürlich noch die Angabe des Anfangszustandes, und zwar möge, um den erwähnten Voraussetzungen zu entsprechen, W für $t = 0$ überall gleich Null angenommen werden, mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung des Punktes x_0 , während gleichzeitig $\int W d x = 1$ ist. Diese Anfangsbedingung definiert das Quellenintegral der Differentialgleichung (4) und daraus erhält man die allgemeine Lösung für eine beliebige,

durch eine Funktion $F(x)$ dargestellte Anfangsverteilung durch Superposition der voneinander unabhängigen Partialprozesse in der Form:

$$(5) \quad W(x, t) = \int F(x_0) W(x_0, x, t) d x_0.$$

Es ist wohl anzunehmen, daß derartige Lösungen der verallgemeinerten Diffusionsgleichung (4) öfters untersucht worden seien, ob zwar ich solche Arbeiten nicht auffinden konnte. Auf jeden Fall dürfte es von Interesse sein, die Integration für die nachstehenden einfachen Spezialfälle durchzuführen, welche theoretisch oder praktisch von Wichtigkeit sind.

A. Den einfachsten Fall eines „statischen“ Systems, wo die Teilchen von einer in die Normallage zurückwirkenden elastischen Kraft $f(x) = -a x$ beeinflußt werden, habe ich l. c. mittels der direkten Methode behandelt und habe als Lösung gefunden:

$$(6) \quad W(x_0, x, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2 \pi D (1 - e^{-2\gamma t})}} e^{-\frac{\gamma(x - x_0 e^{-\gamma t})^2}{2 D (1 - e^{-2\gamma t})}},$$

wobei γ zur Abkürzung für $\gamma = a \beta$ gesetzt ist.

Tatsächlich verifiziert man mittels direkter Ausrechnung, daß diese Funktion der Differentialgleichung

$$(7) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \gamma x \frac{\partial W}{\partial x} + \gamma W$$

Genüge leistet. Auch ist ohne weiteres ersichtlich, daß sie sich für kurze Zeiten auf (8) bzw. (2) reduziert. Wir sehen also, daß unsere damalige Lösung sich in unsere jetzige verallgemeinerte Theorie richtig einordnet.

Was die experimentelle Verwirklichung dieses Falles anbelangt, wurde schon damals darauf hingewiesen, daß die Winkelverschiebungen eines an einem Torsionsfaden befestigten Spiegelchens von demselben Wahrscheinlichkeitsgesetze beherrscht werden, und daß die Möglichkeit diesbezüglicher Messungen nicht ausgeschlossen erscheint.

B. Der Fall einer konstanten Kraft, welcher z. B. durch die Brownsche Bewegung von Teilchen repräsentiert wird, die spezifisch schwerer sind als das umgebende Medium, erledigt sich ohne weiteres, falls keine speziellen Grenzbedingungen im Endlichen in Betracht kommen, da dann

offenbar (3) mit konstantem $f(x)$ für beliebig lange Zeiten gültig bleibt. Es kommt dies natürlich einfach auf eine Superposition von Diffusions- und Fallbewegung hinaus.

C. Komplizierter wird die Sache, falls beispielsweise die Nebenbedingung auftritt, daß an der Stelle $x = 0$ fortwährend die Teilchenkonzentration $W = 0$ herrschen muß. Dies würde durch Versuchsbedingungen verwirklicht, ähnlich den von Brillouin angewendeten, bei welchen jedes an den Gefäßboden $x = 0$ ankommende Teilchen an demselben festklebt. Dann gilt, wie ich kürzlich gezeigt habe:¹⁾

$$(8) \quad W(x_0, x, t) = \frac{e^{-\frac{c(x-x_0)}{2D} - \frac{c^2 t}{4D}}}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} \right],$$

wenn c die normale Fallgeschwindigkeit $c = -\beta f$ bedeutet, was durch die Transformation auf ein mit der Geschwindigkeit c bewegtes Koordinatensystem in die von Schrödinger angegebene Lösung übergeht. Dieselbe findet praktische Anwendung bei der Berechnung der Ehrenhaft-Millikanschen Versuche.

D. Nehmen wir im Gegensatz zum letzten Falle an, daß der Gefäßboden $x = 0$ für die auftreffenden Teilchen undurchdringlich sei und dieselben wieder reflektiere, wie dies bei den Versuchen²⁾ von Perrin, Ilijn, Westgren u. a. über Schwereverteilung von sedimentierten Gummigutt-Emulsionen u. dgl. der Fall war. Diese Bedingung, welche das astatische System (B) in ein statisches verwandelt und welche als „ausgearteter Fall“ der linearen Differentialgleichung zu bezeichnen wäre, lautet³⁾

1) M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. **16**, p. 318. 1915; E. Schrödinger, l. c. p. 289. Vgl. auch L. Brillouin, Ann. chim. phys. **27**, p. 412. 1912; M. v. Smoluchowski, Wien. Ber. II. **124**, p. 263. 1915.

2) J. Perrin, zusammenfassende Darstellungen: Rapp. d. Congrès Solvay p. 179. Paris 1912; Die Brownsche Bewegung usw., Kolloid-chemische Beihefte **1**, p. 221. 1910. Vgl. außerdem: B. Ilijn, Journ. Russ. phys.-chem. Ges. **44**, p. 157. 1912; A. Westgren, Zeitschr. f. phys. Chem. **88**, p. 151. 1913; J. Perrin, Compt. rend. **158**, p. 1168. 1914; R. Constantin, l. c. **158**, p. 1171, 1341. 1914.

3) Wir vernachlässigen die Widerstandsvermehrung in der Nachbarschaft der ebenen Wand, da dieselbe nur bis zu Entfernungen von der Größenordnung des Teilchendurchmessers merklich ist.

$$D \frac{\partial W}{\partial x} + c W = 0 \quad \text{für } x = 0,$$

und als Lösung habe ich hierfür mittels Fourierscher Methoden gefunden:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} W(x_0, x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4 D t}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4 D t}} \right] e^{-\frac{c(x-x_0)}{2 D} - \frac{c^2 t}{4 D}} \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{c}{D \sqrt{\pi}} e^{-\frac{c x}{D}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz. \end{array} \right.$$

Derartige Spezialfälle der mit Schwere kombinierten Diffusion lassen sich aber auch sehr einfach auf Grund des nachstehenden Satzes allgemein lösen: Das Quellen-Integral der Differentialgleichung

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial x},$$

welches einer der für $x = 0$ geltenden Grenzbedingungen:

$$\text{a) } u = 0 \quad \text{oder} \quad \text{b) } \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{oder} \quad \text{c) } \frac{\partial u}{\partial x} + h u = 0$$

entspricht, ist gegeben durch die Formel:

$$(11) \quad u = U e^{-\frac{c}{2 D} (x - x_0) - \frac{c^2 t}{4 D}},$$

worin U das der entsprechenden Grenzbedingung:

$$\begin{aligned} \text{a) } U = 0 \quad \text{oder} \quad \text{b) } U - \frac{2 D \frac{\partial U}{\partial x}}{c} = 0 \\ \text{oder c) } \left(h - \frac{c}{2 D} \right) U + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Genüge leistende Quellen-Integral der Differentialgleichung

$$(12) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

bedeutet.

Mittels dieses, a posteriori leicht direkt verifizierbaren Satzes lassen sich derlei Aufgaben auf die genügend bekannten Lösungen der gewöhnlichen Wärmeleitungsgleichung zurückführen, und sobald man auf diese Weise das Quellenintegral von (10) ermittelt hat, erhält man die einer beliebigen Anfangsverteilung angepaßte Lösung mittels des durch Formel (5) gekennzeichneten Superpositionsverfahrens.

Da der zuletzt behandelte Fall, wie erwähnt, in der Praxis eine hervorragende Rolle spielt, seien noch einige diesbezügliche Bemerkungen hinzugefügt. Wie die Formel (9) zeigt, ist die Verteilung der von x_0 ausgehenden Teilchen anfänglich dieselbe, als wie wenn der feste Gefäßboden gar nicht vorhanden wäre, also identisch mit (3) bzw. (2). Mit zunehmender Zeit macht sich dagegen der Einfluß des letzteren in wachsendem Maße bemerkbar und schließlich stellt sich die stationäre Sedimentationsverteilung

$$(13) \quad W(x) dx = \frac{c}{D} e^{-\frac{cx}{D}} dx$$

her, deren Gültigkeit seinerzeit von Einstein und mir theoretisch vorausgesehen und namentlich durch die schönen Arbeiten Perrins und seiner Schüler so genau experimentell erwiesen worden ist. Werden nämlich in letzterem Ausdrucke der Diffusionskoeffizient

$$D = \frac{H T}{N} \beta$$

und die Fallgeschwindigkeit c durch ihre Werte ersetzt, so sehen wir, daß der Koeffizient

$$\frac{c}{D} = \frac{4 \alpha^3 \pi (\rho - \rho_0) g N}{H T}$$

ist, in Übereinstimmung mit dem für jenen Fall gültigen aerostatischen Exponentialgesetz. Letzteres stellt natürlich auch bei beliebiger Anfangsverteilung den schließlich eintrtenden Endzustand dar.

Theoretisch interessant ist in unserem Falle der allmähliche Übergang zwischen den drei durch entsprechende Länge der Zeit t charakterisierten Stadien mit vorherrschendem Typus der Brownschen Bewegung, Fallbewegung und Sedimentationsverteilung, welche bisher immer gesondert untersucht wurden.

Die Gleichung (9) bzw. deren Verallgemeinerung im Sinne von (5) gilt übrigens noch für manche andere in der Praxis öfters vorkommende Fälle; erwähnt seien beispielsweise die Sedimentierung eines chemischen Niederschlags, der Prozeß des Filtrierens, das Durchströmen eines Flüssigkeits- oder Gasgemisches durch eine halbdurchlässige Wand, die Verteilung einer beigemischten Fremdstoffsubstanz an Orten, wo Kristallbildung, Kondensation oder Verdampfung stattfindet u. dgl.

Auch ein von Gouy¹⁾ kürzlich mittels näherungsweiser Schätzmethoden behandeltes Problem gehört hierher: treffend die Geschwindigkeit, mit welcher sich in der Atmosphäre das aerostatische Gleichgewicht zwischen Stickstoff und Sauerstoff herstellt.

Schließlich erwähnen wir noch, daß man in (9) nicht $c = 0$ setzen darf. Für diesen Fall, welcher den Verlauf der gewöhnlichen Diffusion bei Gegenwart eines undurchdringlichen Bodens darstellt, erhält man aber nach der bekannten Spiegelungsmethode die Lösung²⁾

$$(14) \quad W(x_0, x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4 D t}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4 D t}} \right].$$

Zu der allgemeinen Gleichung (4) zurückkehrend, bemerken wir noch folgendes:

Für unendlich lange Zeiten, wo sich eine stationäre Verteilung herstellt, resultiert aus (4) für vollständige Systeme infolge der Relation $\partial W / \partial t = 0$ die Formel:

$$(15) \quad W = A e^{\frac{\beta}{D} \int f(x) dx} = A e^{-\frac{U}{H T}},$$

welche mit dem bekannten Verteilungsgesetz der statistischen Mechanik übereinstimmt, das die allgemeine Häufigkeit eines Parameterwertes als Funktion der bei Verschiebung aus der Normallage zu leistenden Arbeit U ausdrückt.

Multipliziert man (4) mit x oder x^2 und integriert über den ganzen Bereich der x , so gelangt man zu den folgenden Beziehungen für die Durchschnittswerte jener Größen:

$$(16) \quad \frac{\partial \langle \bar{x} \rangle}{\partial t} = \beta \bar{f},$$

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle (x - x_0)^2 \rangle = 2 D + 2 \beta \langle (x_0 - x) f \rangle.$$

Die zweite Gleichung stellt die Abweichung dieses allgemeinen Falles von der bekannten, für die astatische Brownsche Bewegung gültigen Formel

$$\langle (x - x_0)^2 \rangle = 2 D t$$

dar, wobei das Zusatzglied die Form des aus der Gastheorie

1) L. Gouy, Compt. rend. 158. p. 664. 1914.

2) M. v. Smoluchowski, Bull. Acad. Cracovie p. 418. 1913.

als Virial bekannten Ausdruckes besitzt.¹⁾ Der Einfluß des letzteren verschwindet selbstverständlich für kurze Zeiten t , so daß man in diesem Grenzfall, wie schon erwähnt, auf die gewöhnliche Formel zurückkommt.

Die Gleichung (16) könnte man der Beziehung gegenüberstellen, welche die gewöhnliche Dynamik für die Bewegung des Teilchens ergibt, wenn die Brownsche Bewegung vernachlässigt und nur die Wirkung der Kraft $f(x)$ und des Reibungswiderstandes in Rechnung gezogen wird:

$$(18) \quad dx/dt = \beta f(x)$$

Da letzteres der makroskopisch thermodynamischen Auffassung der Reibung als eines irreversiblen Vorganges entspricht, könnte man (18) auch kurz als thermodynamische Bewegungsformel bezeichnen. Dieselbe stimmt also gemäß (16) im Falle einer elastischen Kraft $f = -a x$, wie schon seinerzeit gezeigt wurde, vollständig mit den zeitlichen Änderungen der durchschnittlichen Verschiebung der Teilchen überein.

Nun sehen wir aber, daß dies nur in speziellen Fällen gelten kann, denn $f(\bar{x})$ und $f(\bar{x})$ sind wohl identisch, wenn f eine lineare Funktion ist, aber durchaus nicht allgemein. Tatsächlich sieht man beispielsweise in dem Falle der Gleichung (9) ohne weiteres, daß die durchschnittliche Entfernung \bar{x} des Teilchens vom Gefäßboden immer endlich bleibt, während die gewöhnliche, der molekularen Agitation des umgebenden Mediums keine Rechnung tragende Dynamik verlangen würde, daß das Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit zu Boden sinke und daselbst liegen bleibe.

Ebenso läßt sich leicht nachweisen, daß die Bewegung gemäß Formel (18) zwar im Falle (A.) unter allen laut (6) möglichen Molekularbewegungen die wahrscheinlichste ist, daß aber die Übereinstimmung der thermodynamischen und der wahrscheinlichsten Vorgänge durchaus nicht allgemein gilt und insbesondere nicht im Falle (9).

Das bisher Gesagte bezog sich auf die Geschwindigkeit, mit welcher die Änderungen in einem System erfolgen, das von einem gegebenen Anfangszustand ausgeht. Aber auch

1) Darauf wurde ich infolge einer Unterredung mit Hrn. Prof. Ph. Frank aufmerksam, welcher dem Zusammenhang zwischen Virial und Brownscher Bewegung ein eingehenderes Studium gewidmet hat.

der noch weit prägnantere Gegensatz, welcher zwischen der thermodynamischen und molekularen Auffassung bezüglich der Art des schließlich resultierenden Endzustandes besteht, wird durch das letzterwähnte Beispiel klar illustriert. Für ein individuelles System gibt es natürlich überhaupt keinen Endzustand im Sinne des Entropiesatzes oder des H -Theorems, indem dasselbe sich von dem durch ein Maximum der Entropie S_m charakterisierten Zustand beliebig weit entfernen kann. Es kann sich also nur noch um die Frage handeln, ob jenes Theorem den wahrscheinlichsten oder aber den durchschnittlichen Endzustand des Systems richtig angibt, Begriffe, die allerdings meist durcheinander geworfen werden.

Diesbezüglich zeigt nun unser Beispiel, daß wohl die erstere, aber nicht die zweite Eventualität zutrifft. Denn die wahrscheinlichste Endlage eines Teilchens im Schwerefelde ist natürlich auch gemäß (9) der niedrigst gelegene Punkt $x = 0$, dagegen bleibt die durchschnittliche Entfernung des Teilchens vom Boden endlich und beträgt $\lim \bar{x} = D/c$. Würde eine Schar derartiger Teilchen vom Gefäßboden $x_0 = 0$ als Anfangslage ausgehen, so würden sie auf Kosten der Wärmeenergie gegen die Schwerkraft Arbeit leisten und deren durchschnittliche Entropie würde im Widerspruch mit dem II. Hauptsatz bis zu einem Grenzwert $\bar{S} = S_m - H/N$ abnehmen. In diesem Beispiel treten also die Mängel der klassischen „thermodynamischen“ Betrachtungsweise noch greifbarer zutage, als in dem früher von mir untersuchten Falle (A.).

Krakau, Physik. Institut der Jagiellonischen Universität,
Oktober 1915.

(Eingegangen 29. Oktober 1915.)

8. **Das Cosinusgesetz in der kinetischen Gastheorie;**
von Martin Knudsen.

Betrachten wir ein Oberflächenelement vom Flächeninhalt dS eines sich in einer ruhenden Gasmasse befindenden festen Körpers, so wird die Anzahl von Stößen n' , die die Gasmoleküle in jeder Sekunde dem Oberflächenelement mitteilen, dem mittleren Werte nach $n' = \frac{1}{4} N \bar{c} dS$ sein, wo N die Anzahl von Gasmolekülen in jedem Kubikzentimeter und \bar{c} die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle bedeuten. Die stoßenden Moleküle kommen, gleichmäßig über jeden Azimut verteilt, gegen das Flächenelement, und die Anzahl von Molekülen, die vom Raumwinkel $d\omega'$ kommen, der mit der Normalen des Flächenelementes den Winkel x' bildet, muß

$$\frac{1}{4\pi} N \bar{c} \cos x' d\omega' dS \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\pi} n' \cos x' d\omega'$$

sein. Der Gleichgewichtsbedingung wegen muß wiederum eine ebenso große Anzahl Moleküle das Flächenelement mit Bewegung in dem betrachteten Raumwinkel $d\omega'$ verlassen. Dadurch ist jedoch nicht unzweideutig festgestellt, in welchen Richtungen eine einzelne Molekülgruppe von n Molekülen zurückgeworfen werden wird, wenn sämtliche Moleküle von dem betrachteten Raumwinkel $d\omega'$ kommen.

Maxwell¹⁾ nahm an, daß die Zurückwerfungsrichtung der Gasmoleküle in wesentlichem Grade von ihrer Einfallsrichtung abhängig sein könne; dies berücksichtigte er bei seinen Berechnungen, indem er voraussetzte, daß ein Bruchteil f jeder Flächeneinheit die Moleküle zurückwirft, als kämen sie von einer ruhenden Gasmasse (absorbed and evaporated gas), während der Rest der Flächeneinheit $1 - f$ die Gasmoleküle spiegelnd zurückwirft.

1) J. Maxwell, Phil. Trans. 170. p. 251. 1879.

Aus meinen früheren Versuchen über die Strömung von Gasen durch enge Röhren¹⁾ folgerte ich, daß $f = 1$ sein müsse, mit anderen Worten, daß sämtliche n Moleküle, die das Flächenelement vom Raumwinkel $d\omega'$ kommend treffen, wieder mit gleichmäßig über jeden Azimut verteilten Geschwindigkeiten weggehen, genauer präzisiert, daß die Anzahl der Moleküle mit Geschwindigkeitsrichtungen innerhalb eines Raumwinkels $d\omega$ als

$$dn = \frac{1}{\pi} n \cos x \, d\omega$$

angesetzt werden kann. Diesen Satz bezeichnete ich als das Cosinusgesetz; er scheint aber keine allgemeine Anerkennung gewonnen zu haben, indem man oft die Größe f in Arbeiten über die kinetische Theorie auftreten sieht und die Frage erörtert wird, ob f einen anderen Wert hat, wenn die Gasmasse mit dem Flächenelement dS im Temperaturgleichgewicht ist, als wenn sie dies nicht ist. Ich habe daher einige Versuche ausgeführt, die direkt zur Prüfung der Gültigkeit des Cosinusgesetzes dienen.

Bei diesen Versuchen benutzte ich eine Methode ähnlicher Art, wie L. Dunoyer²⁾ sie früher mit Natriumdampf benutzt hat; ich fand es jedoch bequemer, Quecksilberdampf anzuwenden, u. a. weil der Dampfdruck des Quecksilbers genauer gemessen ist. Die Quecksilberdämpfe strömten durch eine Röhre hinaus und verdichteten sich an einer Glaswand, die eine kleine Öffnung hatte. Durch diese Öffnung strömten die Quecksilbermoleküle wie ein Dampfstrahl, indem alle Moleküle sich nahezu in derselben Richtung bewegten. Der Dampfstrahl traf eine feste Wand von gewöhnlicher Zimmertemperatur, und es galt nun, zu bestimmen, in welchen Richtungen die Quecksilbermoleküle zurückgeworfen wurden. Dies läßt sich ermitteln, indem man die zurückgeworfenen Quecksilbermoleküle sich an einer Glaswand verdichten läßt, die bis auf eine so niedrige Temperatur abgekühlt gehalten wird, daß nur ein verschwindend kleiner Bruchteil der die abgekühlte Wand treffenden Moleküle wieder zurückgeworfen

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 28. p. 105. 1909. — Ebenda 35. p. 389. 1911.

2) L. Dunoyer, Compt. rend. 152. p. 502. 1911.

wird. Daß dies der Fall ist, wenn die Kondensationswand die Temperatur von flüssigem Sauerstoff hat, wird in einer folgenden Abhandlung gezeigt.

Bei meinen ersten Versuchen über das Cosinusgesetz ließ ich einen Strahl von Quecksilberdampf eine Metallfläche unter einem Einfallswinkel von etwa 45° treffen. Diese Metallfläche war im Zentrum einer Glaskugel angebracht, die mit flüssigem Sauerstoff umgeben war. Bei ein paar anderen Versuchen ersetzte ich die Metallfläche durch eine Glasfläche und eine Gipskristallplatte. Auf diese im April 1915 ausgeführten Versuche werde ich indessen hier nicht näher eingehen, da ganz ähnliche Versuche wohl ungefähr gleichzeitig von Wood ausgeführt worden sind und er eine Mitteilung darüber veröffentlicht hat.¹⁾

Wie Wood konnte auch ich am Rande des Quecksilberbelages eine vollständig klare und durchsichtige Zone beobachten, dachte aber nicht, daß diese Zone auf einer Abweichung vom Cosinusgesetze zu beruhen brauche. Bei speziellen Versuchen über die Zurückwerfung der Quecksilbermoleküle von stark abgekühltem Glas zeigte sich eine ähnliche Zone, die aber schmäler und schmäler wurde, je nach dem die Destillation fortgesetzt wurde. Da der Belag ja eine gewisse Dicke oder Oberflächendichte haben muß, um gesehen werden zu können, muß sich, wenn das Cosinusgesetz Gültigkeit besitzt, eine solche Zone zeigen.

Indem die Quecksilbermoleküle bei den von Wood und von mir ausgeführten Versuchen unter einem gewissen Einfallswinkel gegen die zurückwerfende Fläche hinkommen, werden sie in allen Richtungen zurückgeworfen. Der Belag bildet sich an der Kugel zuerst an der Stelle, wo diese von der Normalen der zurückwerfenden Fläche durchschnitten wird, und verbreitet sich von da aus gleichmäßig nach allen Seiten hin, indem der Belag dort, wo er sich zuerst zeigte, fortwährend am dicksten ist und die Dicke oder Oberflächendichte nach dem Großzirkel hin abnimmt, der in derselben Ebene gelegen ist wie die zurückwerfende Fläche. Darin liegt nichts das Cosinusgesetz widerlegendes; eine zuverlässige Bestätigung seiner Gültigkeit erhält man dadurch aber auch

1) R. W. Wood, Phil. Mag. 30. p. 300. Aug. 1915.

nicht. Um eine solche zu gewinnen, wandte ich folgendes Raisonnement an.

Wenn man durch eine Beobachtung der Durchsichtbarkeit oder des Reflexionsvermögens eines Quecksilberbelages eine sichere Bestätigung der Gültigkeit des Cosinusgesetzes gewinnen soll, muß man den Versuch so einrichten, daß das Cosinusgesetz verlangt, daß die Fläche, an der sich der Beleg bildet, überall dieselbe Oberflächendichte erhält. Dies wird der Fall sein, wenn die verdichtende Fläche eine Kugelfläche darstellt, wenn die zurückwerfende Fläche ein Teil der verdichtenden Kugelfläche ist.

Gehen von einem Arealelement A einer Kugelfläche mit dem Radius R n Moleküle aus (Fig. 1), so muß infolge des Cosinusgesetzes eine Anzahl von

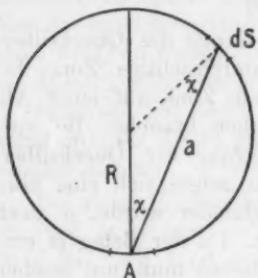


Fig. 1.

im Raumwinkel $d\omega$ ausgehen. Schneidet dieser Raumwinkel ein Arealelement dS von der Kugelfläche ab, so hat man

$$d\omega = \frac{dS \cos x}{a^2}$$

und somit

$$dn = \frac{1}{\pi} n \frac{\cos^2 x}{a^2} dS = \frac{1}{\pi} n \frac{1}{4R^2} dS.$$

Die Anzahl von Molekülen an jeder Oberflächeneinheit der Kugel ist

$$\frac{dn}{dS} = \frac{1}{\pi} n \frac{1}{4R^2},$$

und dieser Anzahl ist die Oberflächendichte ϱ des Belages proportional, so daß man, wenn die Gewichtsmenge von Quecksilberdampf Q vom Areal A zurückgeworfen wird,

$$\varrho = Q \frac{1}{4\pi R^2}$$

oder ϱ gleich der ganzen zurückgeworfenen Menge dividiert durch das ganze Oberflächenareal der Kugel hat. Die Oberflächendichte ϱ ist also konstant, wenn das Cosinusgesetz Gültigkeit besitzt, und man sieht leicht, daß eine Abweichung

vom Cosinusgesetz eine Abweichung von der gleichmäßigen Verteilung des Quecksilbers an der Kugelfläche bewirken muß. Hat das Oberflächenelement A eine endliche Größe, so wird eine wiederholte Zurückwerfung ermöglicht, und ϱ wird dann gleich Q , dividiert durch das Areal desjenigen Teiles der Kugelfläche, der nicht zurückwirkt.

Zur Anstellung dieser Probe verwendete ich einen Glasapparat, wie ihn Fig. 2 veranschaulicht. Die Glaskugel A

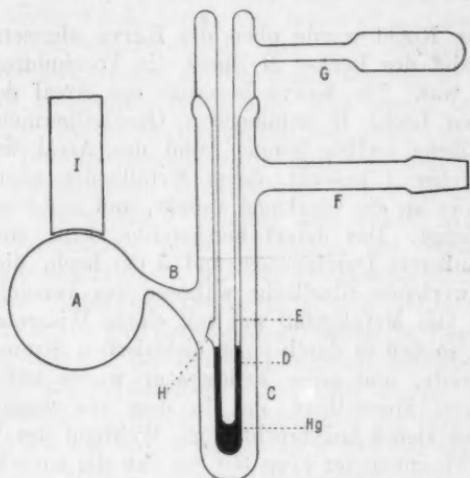


Fig. 2.

wurde so genau wie tunlich kugelförmig geblasen. Ihr innerer Durchmesser war 4,90 cm. Durch die schräge Seitenröhre ist die Kugel mit dem Teil des Apparates verbunden, in dem die Quecksilberdämpfe sich bilden. Dieser Teil besteht aus 3 Glasröhren C , D und E , die ineinander angebracht, unten geschlossen und oben zusammengeblasen sind, wie in der Figur dargestellt. Die äußere Röhre C wird durch eine Seitenröhre F mit Schliff mit der Luftpumpe verbunden, und der Raum zwischen der inneren und der mittleren Röhre ist oben mit der geschlossenen Seitenröhre G verbunden, die tatsächlich direkt vorwärts geht und nicht, wie in der Figur, der Schlifftröhre F parallel ist. In dieser Seitenröhre wurde das Quecksilber angebracht, und wenn der Apparat an die Pumpe

angebracht war, war er so gedreht, daß sich die Röhre *G* nach unten kehrte. Während des Auspumpens wurde das Quecksilber in *G* ausgekocht, worauf der Apparat um den Schliff gedreht wurde, bis in die in der Figur angegebene Stellung. Das Quecksilber lief nun in den Zwischenraum zwischen der inneren und der mittleren Röhre, *Hg*, hinab. An der mittleren Röhre war bei *H* ein kleines Loch angebracht, durch das die Quecksilberdämpfe in die Kugel hinüberströmen konnten.

An der Kugel wurde oben die Kurve abgesetzt, durch die der Rand des Loches *H* durch die Verbindungsrohre *B* ersichtlich war. Die Kurve begrenzt das Areal der Kugel, wo die vom Loche *H* kommenden Quecksilbermoleküle die Kugeloberfläche treffen können, und das Areal wurde von der Metallröhre *I* bedeckt, deren Metallboden abgedrechselt ist, so daß er an die Glaskugel anpaßt, und mit Pizein ist er daran befestigt. Das derart hergestellte kleine Metallgefäß, 2 cm an äußerem Durchmesser und 5 cm hoch, dient dazu, die zurückwerfende Glasfläche während des Versuches warm zu halten. Das Metallgefäß war mit einem Widerstandsdraht umwickelt, so daß es durch einen elektrischen Strom erwärmt werden konnte, und seine Temperatur wurde mittels eines Thermometers kontrolliert, das in dem ein wenig Wasser enthaltenden Gefäß angebracht war. Während des Versuches zeigte das Thermometer etwa 30° , so daß die zurückwerfende Glaswand annehmbar eine Temperatur zwischen 0° und 20° gehabt hatte.

Der Apparat war so angebracht, daß eben der oberste Teil der Glaskugel warm gehalten wurde, während der ganze Rest der Kugel, die Verbindungsrohre *B* und ein angemessener Teil des übrigen Apparates in einem 10 cm weiten unversilberten Vakuumgefäß mit flüssigem Sauerstoff umgeben wurde. Das Vakuumgefäß konnte bequem gesenkt und gehoben werden, und dadurch sowie durch häufige Füllung mit flüssigem Sauerstoff wurde dafür gesorgt, daß die Oberfläche des flüssigen Sauerstoffs fast bis an die Metallröhre *I* reichte.

Um dem verdampfenden Quecksilber *Hg* eine angemessene Temperatur zu geben, wurde ein wenig Vaselinöl in die innerste Röhre getan, die, wie die Figur zeigt, oben ganz offen ist. In

dieser Röhre wurde ein Glasstäbchen angebracht, das unten mit Platindraht umwickelt war, so daß man mittels eines elektrischen Stromes eine angemessene Wärmeentwicklung erzeugen und also das Quecksilber *Hg* warm erhalten konnte.

Bei dem ersten mit diesem Apparat ausgeführten Versuch begann ich, nachdem der flüssige Sauerstoff an seinen Platz gebracht worden war, mit einer schwachen Erwärmung des Quecksilbers. Im Laufe einer ganz kurzen Erwärmung des Quecksilbers wurde der an der Röhre *B* gebildete Quecksilberbelag ganz undurchsichtig, und nach einigen Minuten war ein Quecksilberbelag an der Kugel ersichtlich; er schien sich überall gleichzeitig einzufinden und wurde immer undurchsichtiger; es war nicht möglich, irgendwo eine Struktur oder einen Durchsichtigkeits- oder Reflektionsunterschied zu erkennen, ausgenommen an einer ca. 1 mm breiten Zone, welche das Wärmgefäß *J* umgibt, und welche vollkommen klar und durchsichtig blieb. Nachdem der Versuch gute 20 Minuten gedauert hatte, war der Quecksilberbelag so dick, daß man eine Glühlampe eben noch dadurch erblicken konnte. Der Versuch wurde nun unterbrochen, indem die Erwärmungsströme ausgeschaltet, der flüssige Sauerstoff entfernt und der Apparat mit atmosphärischer Luft gefüllt wurde. Nachdem der Quecksilberbelag flüssig geworden und die Glaskugel von Reif befreit worden war, ergab es sich, daß der Quecksilberbelag eine sehr charakteristische Opaleszenz hatte, und zwar überall, wo sich ein Belag fand, dieselbe, und die Beugungsringe, welche die Quecksilbertropfen erzeugten, wenn sich eine entfernte Glühlampe in der Glaskugel spiegelte, hatten überall an der Kugel dasselbe Aussehen. Die letzte Probe wurde angestellt, nachdem die Kugel 24 Stunden gelegen hatte, so daß die Quecksilbertropfen weniger und größer geworden waren.

Um eine quantitative Bestimmung der Dichte des Quecksilberbelages an verschiedenen Stellen der Kugel zu erhalten, wiederholte ich den Versuch mit stärkerer Erwärmung als zuvor. Der Versuch dauerte wieder gute 20 Minuten, und der Quecksilberbelag bekam eine solche Dicke, daß er ganz undurchsichtig wurde. Auch diesmal war es nicht möglich, unter den verschiedenen Arealelementen der Kugel — weder während der Bildung des Belages, noch nachdem sich der Be-

lag nach Beschiebung des Versuches zu Kugeln gesammelt hatte — einen Unterschied zu erkennen. Die Kugel wurde nun von dem übrigen Teil des Apparates abgeschnitten, und es wurde in dieselbe ein kleiner Quecksilbertropfen getan. Diesen Tropfen ließ ich herumlaufen und den Quecksilberbelag aufsammeln, ausgenommen an drei einigermaßen kreisrunden Flecken, die wie Fig. 3 zeigt orientiert und numeriert waren.

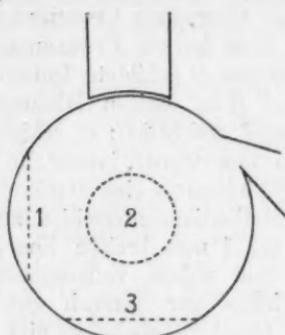


Fig. 3.

Flecken Nr. 1 fand sich, wo man der größten Oberflächendichte gewärtig sein sollte, falls ein Teil der Moleküle spiegelnd von der zurückwerfenden Fläche zurückgeworfen würden. Flecken Nr. 2 lag an der einen Seite der Kugel, und Flecken Nr. 3 lag dem zurückwerfenden Teil der Kugeloberfläche diametral entgegengesetzt. Die Größe der Flecken wurde

gemessen, und sie wurden einer nach dem andern mittels eines kleinen Quecksilbertropfens aufgesammelt. So ergaben sich die Gewichtsmengen des Quecksilbers an jedem Flecken. Die Messungen ergaben folgende Resultate:

Areal des Fleckens	Gewicht des Quecksilberbelages	Dichte des Quecksilberbelages
Flecken Nr. 1 5,00 cm ²	0,81 mg	0,162 mg/cm ³
Flecken Nr. 2 7,60 „	1,25 „	0,164 „
Flecken Nr. 3 11,24 „	1,62 „	0,144 „

Der Unterschied dieser Dichtigkeiten ist so gering, daß er sich aus Beobachtungsfehlern erklären läßt, und übrigens mußte man a priori erwarten, daß der Belag von Flecken Nr. 3 eine etwas geringere Dicke haben sollte als der der übrigen, falls das Cosinusgesetz strenge Gültigkeit besitzt, denn Kollisionen zwischen den einfallenden und den zurückgeworfenen Quecksilbermolekülen müssen im obersten Teil der Kugel stattfinden, und annehmbar an den Stellen der Kugeloberfläche, die der Kollisionsstelle am nächsten liegen, eine größere Dichte bewirken, d. h. oben eine größere Oberflächendichte als unten, wo Flecken Nr. 3 sich befindet.

Als Ergebnis des Versuches kann man also folgern, daß das Cosinusgesetz gleichfalls mit der bei diesen Versuchen erzielten Genauigkeit gilt. Die Gültigkeit des Gesetzes bei der molekularen Strömung durch Röhren habe ich früher in dem Falle dargetan, wo zwischen dem Gas und der zurückwerfenden Fläche Temperaturliegung bestehen, und die Gültigkeit des Gesetzes ist nun hiermit in einem Falle erwiesen, wo kein Temperaturliegung bestehen, denn die Quecksilberdämpfe hatten während des Versuches eine Temperatur von über 80° , während die Temperatur der zurückwerfenden Fläche unter 20° war.

Für ihre Hilfe bei dieser Arbeit danke ich den Herren Assistenten Viggo Andersen und Johannes Olsen. Der Direktion des Carlsbergfond bin ich für die mir zur Ausführung der Arbeit bewilligten Mittel zu Dank verpflichtet.

Köbenhavns Universitet, Dezember 1915.

(Eingegangen 7. Dezember 1915.)

**9. Bemerkungen
zu der Arbeit des Hrn. G. Schweikert:
Bestimmung der Schallgeschwindigkeit usw.;
von C. Dieterici.**

Im Bd. 48. p. 593—667 dieser Annalen befindet sich die oben zitierte Arbeit des Hrn. Schweikert, in welcher er p. 648 die früher in diesen Annalen Bd. 45. p. 913 (1914) von Hrn. Schöler veröffentlichten Beobachtungen mit den Worten abtut: „Die Werte von Keutel, Thibaut und Schöler können, abgesehen von der Unzulänglichkeit ihrer Methode, schon wegen der Temperaturschwankungen, denen ihr Apparat ausgesetzt war, keinen Anspruch auf große Genauigkeit machen“.

Hr. Schöler steht im Felde; dieser Umstand rechtfertigt es, wenn ich zur Sache das Wort nehme, weil Hrn. Schölers Arbeit unter meiner Leitung ausgeführt ist.

Hr. Schweikert bestimmt die Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Gasen nach der Kundtschen Methode der Staubfiguren durch Messung der Wellenlänge eines Tones konstanter Tonhöhe (angeriebener Glasstab) in sehr weiten Röhren von 5—8 cm Durchmesser. Hr. Schöler hatte Röhren von 2,5 cm Durchmesser benutzt und die von Behn und Geiger eingeführte, auch von Keutel und Thibaut verwendete Methode benutzt, die Tonhöhe so zu ändern, daß in einem vollkommen geschlossenen Rohre die Kundtschen Staubfiguren sich gut ausbildeten.

Für die relative Schallgeschwindigkeit bei Atmosphärendruck, d. h. das Verhältnis der Wellenlänge des gleichen Tones in Gas und in Luft, findet:

	Schweikert auf 0° und 760 red.	Schöler $p = 1 \text{ Atm. } t = 20^\circ \text{C.}$
CO ₂	0,7758 und 0,7761	$\frac{73,97}{95,05} = 0,7782$
SO ₂	0,6809 „ 0,6812	$\frac{59,99}{95,71} = 0,6307$
NH ₃	1,2485 „ 1,2429	$\frac{118,28}{94,84} = 1,2471$
C ₂ H ₄	0,9531 „ 0,9536	$\frac{84,15}{88,13} = 0,9548$

Mr. Keutel fand für NH₃, bei $p = 1 \text{ Atm.}$ und $t = 20^\circ$ $\lambda/\lambda' = 1,2530$;

Mr. Thibaut für CO₂ und $p = 1 \text{ Atm.}$ bei $t = 15^\circ$ $\lambda/\lambda' = 0,7783$, bei $t = 18^\circ$ 0,7773, für SO₂ und $p = 1 \text{ Atm.}$ bei $t = 20^\circ$ $\lambda/\lambda' = 0,6291$.

Vergleicht man die Resultate der verschiedenen Beobachter, so findet man bei SO₂, NH₃, C₂H₄ eine Übereinstimmung von etwa 0,1 Proz. Das ist die Grenze der überhaupt erreichbaren Genauigkeit in der Bestimmung des Verhältnisses der Wellenlänge; denn eine solche Genauigkeit verlangt, daß jede Wellenlänge, die doch nur etwa 10 cm beträgt, mit einer Genauigkeit von 1 : 2000 gemessen ist, also auf 0,05 mm, und selbst wenn in der Längenmessung eine solche Genauigkeit erzielt ist, bleibt noch die Voraussetzung zweifelhaft, ob bei der verhältnismäßig groben Tonerregung des Stabes oder Rohres durch mechanisches Anreiben die Tonhöhe auf 1 : 2000 genau konstant vorausgesetzt werden kann.

Bei CO₂ stimmen die Beobachtungen von Thibaut und Schöler vollkommen überein, Hrn. Schweikerts Bestimmungen weichen um 1 : 400 ab. Aber diese Differenz verschwindet, wenn man nicht die auf 0° und 760 mm reduzierten Beobachtungen nimmt, sondern die unmittelbaren, also das Verhältnis der Wellenlängen bei der mittleren Versuchstemperatur $t = 20^\circ \text{ C.}$ und dem mittleren Barometerstande berechnet. Denn aus den nicht reduzierten Zahlen des Hrn. Schweikert ergibt sich für Ton I 0,7769 bei 20° C. Also

eine Zahl, die mit denen von Thibaut und Schöler erhaltenen identisch ist.

Hätte Hr. Schweikert seine unmittelbaren Versuchsergebnisse mit denen der früheren Beobachter verglichen, wie hier geschehen ist, so hätte er wohl nicht den Satz abfälliger Kritik geschrieben, der mich zur vorliegenden Notiz zwingt, sondern hätte festgestellt, daß bei den benutzten Röhrenweiten noch kein Einfluß der Reibung an der Wand mit Sicherheit beobachtet werden kann.

Hr. Schweikert sieht zwei Fehlerquellen bei Schöler, Thibaut und Keutel; erstens Temperaturinkonstanz des Beobachtungsraumes, zweitens Temperaturbeeinflussung des angeriebenen Rohres durch Verdunstung des durch den anreibenden feuchten Lappen übertragenen Wassers.

Beide Verdachtsmomente treffen aber nicht zu. Der Beobachtungsraum wurde auf konstanter Temperatur gehalten und nur beobachtet, wenn ein in $1/10^0$ geteiltes neben dem Versuchsrohr hängendes Thermometer die normale Temperatur 20^0 C. anzeigte. Und was den zweiten Punkt anbetrifft, so sei darauf aufmerksam gemacht, daß die von Schöler benutzten beiderseits geschlossenen Rohre 1,20 m lang waren, in der Mitte den Ansatzstutzen zur Füllung mit den verschiedenen Gasen trugen. Die eine Seite des Rohres wurde mit einem feuchten Lappen angerieben, die Staubfiguren aber in der anderen Seite des Rohres beobachtet (vgl. Schöler, Inaug.-Diss. p. 10).

Kiel, Physikal. Institut d. Universität.

(Eingangen 10. Dezember 1915.)

Namenregister zum Jahrgang 1915.

A.

Ackermann, W., Beobachtungen über Pyroelektrizität in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur 46, 197.

Augustin, H., Über die Dichte des flüssigen Wasserstoffs, den Brechungsexponenten und die Dispersion des flüssigen Wasserstoffs und des flüssigen Stickstoffs 46, 419.

B.

Bakker, G., Oberflächenspannung und Krümmung der Kapillarschicht. Interpretation des labilen Teils der theoretischen Isotherme 48, 770.

Bannowitz, E., Über die Wärmeleitung des Neon 48, 577.

Becher, S., Über den Astigmatismus des Nicols und seine Beseitigung im Polarisationsmikroskop 47, 285.

Beckman, B., Über den Einfluß von Druck und Temperatur auf die elektrische Leitfähigkeit des

Palladiums bei Wasserstoff-Okklusion 46, 481. — Über den Einfluß des Druckes auf die elektrische Leitfähigkeit bei Tellur 46, 931.

Benedict, E., Bestimmung der wahren Temperatur fester Körper aus dem Schnittpunkt der logarithmischen Isochromaten im sichtbaren Spektrum 47, 641.

Boedeker, K., Untersuchungen über die Einwirkung periodischer Kräfte auf Tropfen 46, 503.

Brentano, J., Über den Einfluß allseitigen Druckes auf die elektrische Leitfähigkeit von Wismutdrähten außerhalb und innerhalb des transversalen Magnetfeldes für Gleichstrom und für Wechselstrom 46, 941.

C.

Coehn, A. u. J. Franken, Über die Berührungslektizität fester Dielektrika gegen leitende und nichtleitende Flüssigkeiten 48, 1005.

D.

Dannecker, C. u. K. R. Koch, Die Elastizität einiger Metalle und Legierungen bis zu Temperaturen, die ihrem Schmelzpunkt naheliegen 47, 197.

Debye, B., Zerstreuung von Röntgenstrahlen 46, 809.

Dempster, A., Über die Breite von Spektrallinien 47, 791.

Dieterici, C., Bemerkungen zu der Arbeit des Hrn. G. Schweißkert. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit 48, 1123.

Droysen, O., Funkendämpfung und Löschwirkung bei kürzeren Wellenlängen 46, 449.

E.

Ehrenfest, P., Zur Kapillaritätstheorie der Kristallgestalt 48, 380. — Über die kinetische Interpretation des osmotischen Druckes 48, 389.

Ehrenfest, P. u. H. Kammerlingh Onnes, Vereinfachte Ableitung der kombinatorischen Formel, welche der Planckschen Strahlungstheorie zugrunde liegt 46, 1021.

Ehrhardt, M., Über elektrische Schwingungen in Luft und längs Drähten 47, 809.

Einstein, A., Antwort auf eine Abhandlung M. v. Laues „Ein Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung auf die Strahlungstheorie“ 47, 879.

Ernst, A., Über radioaktive Schwankungen bei Verwendung nichtgesättigter Ströme 48, 877.

F.

Fassbinder, J., Die Leitung des elektrischen Stromes in Äthyläther 48, 449.

Försterling, K., Über die thermodynamischen Gesetze periodischer Bewegungen, welche dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgen 47, 1127.

Franken, J. u. A. Coehn, Über die Berührungselastizität fester Dielektrika gegen leitende und nichtleitende Flüssigkeiten 48, 1005.

Fredericksz, V. u. W. Voigt, Theoretisches u. Experimentelles zu der piezoelektrischen Erregung eines Kreiszylinders durch Drilling und Biegung 48, 145.

Frey, W., Die Abhängigkeit des Halleffekts in Metallen von der Temperatur 46, 1057.

Friedersdorff, K., Der Dopplereffekt der Kanalstrahlen in Argon 47, 787.

Fritze, H., Die optischen Konstanten durchsichtiger Silber- und Kupferschichten 47, 763.

G.

Gaede, W., Die Diffusion der Gase durch Quecksilberdampf bei niederen Drucken und die Diffusionsluftpumpe 46, 357.

Gans, R., Über die Form ultramikroskopischer Silberteilchen 47, 270. — Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium 47, 709. — Die Koerzitivkraft von Stahl und Eisen in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur 48, 514.

Garten, S., Ein Schallschreiber mit sehr kleiner Seifenmembran 48, 273.

Gehrcke, G. u. L. Janicki, Die Abhängigkeit des photoelektrischen Aufladepotentials vom Material 47, 679.

Gehrts, F., Über das Reflexionsvermögen einiger Lösungen im ultraroten Spektrum 47, 1059.

Gerlach, W. u. E. Meyer, Über die Abhängigkeit der photoelektrischen Verzögerungszeit vom Gasdruck bei Metallteilen ultramikroskopischer Größenordnung 47, 227. — Über das Elementarquantum der Elektrizität und den photoelektrischen Effekt. (Antwort auf die gleichnamige Abhandlung von Hrn. Konstantinowsky.) 48, 718.

Gille, A., Die Koeffizienten der inneren Reibung bei Gemischen von Helium und Wasserstoff 48, 799.

Glocker, R., Interferenz der Röntgenstrahlen und Krystallstruktur 47, 376.

Gottstein, G. u. J. Königsberger, Galvano- und thermomagnetische Effekte variabler Leiter und Metalle 46, 446. — Galvano- und thermomagnetische Effekte variabler Leiter und Metalle 47, 566.

Grotian, W., Der Gleichstrom-Lichtbogen großer Bogenlänge 47, 141.

Gulik, D. van, Über das Absorptionsspektrum des Chlorophylls. II. 46, 147.

H.

Harnack, A., Der Dopplereffekt und die Gesetze der Spiegelung

und Brechung an einer bewegten Grenzfläche 46, 547.

Hauer, F. v., Spontane Temperaturschwankungen in einem Gase 47, 865.

Heurlinger, T., Die Beziehungen zwischen den adiabatischen und isothermen Koeffizienten der galvano- und thermomagnetischen Effekte 48, 84.

Heydweiller, A., Über die Bestimmung der spezifischen Wärme von Flüssigkeiten 46, 253. — Neutralisationswärme und Quantentheorie 48, 681.

Himstedt, F., Über die absolute elektrooptische Verzögerung und Beschleunigung bei der elektrischen Doppelbrechung 48, 1061.

Hoepner, E., Eine Zählung der Elektronen, die eine Metallscheibe bei Bestrahlung mit schwachen Röntgenstrahlen emittiert 46, 577.

Holborn, L. u. H. Schultze, Über die Druckwage und die Isothermen von Luft, Argon und Helium zwischen 0 und 200° 47, 1089.

Holm, E., Berichtigung des Curie-Langevin'schen Magnetisierungsgesetzes für die molekulare Weglänge 47, 1. — Nachtrag zu der Arbeit: Berichtigung des Curie-Langevin'schen Magnetisierungsgesetzes für die molekulare Weglänge 47, 694. — Über eine modifizierte Fassung der Hypothese der molekularen Unordnung und des Äquipartitionsgesetzes der kinetischen Energie 48, 481.

J.

Jaffé, G., Berichtigung zu der Arbeit: Zur Theorie der Licht-

absorption in Metallen und Nichtleitern 46, 984.

Janicki, L. u. G. Gehrcke, Die Abhängigkeit des photoelektrischen Aufladepotentiales vom Material 47, 679.

K.

Kalähne, A., Die Frequenzänderung schwingender Saiten und Stäbe in Flüssigkeiten und Gasen 46, 1. — Die schwingende Spule im Magnetfeld, ein Fall von gedämpften Sinusschwingungen mit nichtlinearem Hemmungsgesetz 48, 261.

Kamerlingh Onnes, H. u. P. Ehrenfest, Vereinfachte Ableitung der kombinatorischen Formel, welche der Planckschen Strahlungstheorie zugrunde liegt 46, 1021.

Keller, E., Diamantröntgenbilder 46, 157.

Kirschbaum, H., Intensität und Absorptionsindex der Röntgenstrahlen von Platin und Kohle 46, 85.

Kittelmann, F., Beitrag z. Kenntnis der Erdalkalisenidphosphore 46, 177.

Kleiber, J., Eine Beziehung zwischen den vier physikalischen Größen c , β , δ , E der festen Elemente 46, 1054.

Knudsen, M., Der molekulare Gaswiderstand gegen eine sich bewegende Platte 46, 641. — Die maximale Verdampfungsgeschwindigkeit des Quecksilbers 47, 697. — Das Cosinusgesetz in der kinetischen Gastheorie 48, 1113.

Koch, John, Über eine neue Linienserie im Spektrum des einwertigen Heliums 48, 98.

Koch, K. R. u. C. Dannecker, Die Elastizität einiger Metalle und Legierungen bis zu Temperaturen, die ihrem Schmelzpunkt nahe liegen 47, 197.

Königsberger, J., Über diskontinuierliche Änderung der Thermokraft 47, 563.

Königsberger, J. u. G. Gottstein, Galvano- und thermomagnetische Effekte variabler Leiter und Metalle 46, 446. — Galvano- und thermomagnetische Effekte variabler Leiter und Metalle 47, 566.

Konstantinowsky, D., Elektrische Ladungen und Brownsche Bewegung sehr kleiner Metallteilchen im Gase. (Ein Beitrag zur Frage des Elementarquantums der Elektrizität.) 46, 261. — Druckfehlerberichtigung und Ergänzung zu „Elektrische Ladungen und Brownsche Bewegung sehr kleiner Metallteilchen im Gase“ 46, 720. — Über das Elementarquantum der Elektrizität und den photoelektrischen Effekt 48, 57.

Kramsztyk, J., Über die räumliche Verteilung der Lichtemission im elektrischen Bogen und Funken 48, 375.

Krause, G., Über die Interferenzerscheinungen am Michelsonschen Interferometer 48, 1037.

Kretschmann, E., Über die prinzipielle Bestimbarkeit der berechtigten Bezugssysteme beliebiger Relativitätstheorien (I) 48, 907. — Über die prinzipielle Bestimbarkeit der berechtigten Bezugssysteme beliebiger Relativitätstheorien (II) 48, 943.

Küstner, H., Die Rolle von Gasen bei dem lichtelektrischen Verhalten des Zinks 46, 898.

L.

Laird, E. R., Über die Erzeugung von Röntgenstrahlen durch langsame Kathodenstrahlen 46, 605.

Landé, A., Die Beugung endlicher Wellenzüge an einer Halbebene 48, 521.

Laub, J., Über die Dispersionerscheinungen des Lichtes in beliebig bewegten Körpern 46, 705. — Über die durch Röntgenstrahlen erzeugten Strahlen 46, 785.

Laue, M. v., Ein Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung auf die Strahlungstheorie 47, 853. — Zur Statistik der Fourierkoeffizienten der natürlichen Strahlung 48, 668.

Lehmann, O., Über Lösung und Ausscheidung von Stoffen, insbesondere flüssiger Kristalle 47, 832. — Die Erzeugung von Bewegung durch molekulare Richtkraft bei flüssigen Kristallen 48, 177. — Die Struktur schleimig-kristallinischer Flüssigkeiten 48, 725.

Lenard, P., Über Wasserfallelektrizität und über die Oberflächenbeschaffenheit der Flüssigkeiten 47, 463.

Löwy, H., Zur Theorie der Gasreaktionen 46, 561.

Lunelund, H. u. J. Stark, Polarisation der Lichtemission der Kanalstrahlen 46, 68.

Lyon, N., Über die Dispersion der elektrischen Doppelbrechung 46, 758.

M.

Magnus, A., Die spezifische Wärme des Platins und des Diamanten bei hohen Temperaturen 48, 963.

Mebius, C. A., Die Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem konstanten, rotierenden Magnetfeld 46, 1013.

Meissner, W., Thermische und elektrische Leitfähigkeit einiger Metalle zwischen 20 und 373° abs. 47, 1001.

Meyer, E. u. Walther Gerlach, Über die Abhängigkeit der photoelektrischen Verzögerungszeit vom Gasdruck bei Metallteilen ultramikroskopischer Größenordnung 47, 227. — Über das Elementarquantum der Elektrizität und den photoelektrischen Effekt. (Antwort auf die gleichnamige Abhandlung von Hrn. Konstantinowsky.) 48, 718.

Minkowski, H. †, Das Relativitätsprinzip 47, 927.

Müller, C. u. E. Warburg, Über die Konstante c des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes 48, 410.

O.

Oseen, C. W., Beiträge zur Hydrodynamik I. 46, 281. — Beiträge zur Hydrodynamik II. 46, 623. — Beiträge zur Hydrodynamik III. 46, 1180. — Über die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Dipolen und über die Drehung der Polarisationsebene in Kristallen und Flüssigkeiten 48, 1.

Overbeck, K., Über magnetische Legierungen 46, 677.

P.

Paulson, E., Gesetzmäßigkeiten im Platinpektrum 46, 698.

Plaats, B. van der, Untersuchung über Absorption und Dispersion des Lichtes in Farbstofflösungen **47**, 429.

Q.

Quincke, G., Ionenwolken in feuchter expandierter Luft **46**, 39. — Struktur und Eigenschaften des Glases **46**, 1025. — Durchbohrung von Glas mit elektrischen Funken und Strahlen **48**, 113.

R.

Retschinsky, T., Über das magnetische Spektrum der Sauerstoffkanalstrahlen **47**, 525. — Über die elektromagnetische und spektrale Analyse der Kanalstrahlen **48**, 546.

Rüchardt, E., Über Phosphoreszenzzerregung durch Kanalstrahlen **48**, 838.

Rybár, St., Über die Phasenänderungen der inneren Totalreflexion an den doppelbrechenden Kristallen **46**, 305. — Untersuchungen über die Phasenänderungen des reflektierten Lichtes **46**, 327.

S.

Sachs, St., Über die stille Entladung in Gasen bei Atmosphärendruck **47**, 886.

Schachenmeier, R., Theoretisches über Gleitflächen und Kristallplastizität im allgemeinen **46**, 393. — Über die Anomalie des Reibungskoeffizienten bei anisotropen Flüssigkeiten **46**, 569. — Färbung des Lichtes durch Metallpartikel **46**, 1009. — Über

die dynamische Bedeutung des elementaren Wirkungsquantums **47**, 128.

Schaefer, K. L., Über eine einfache Methode zur Erzeugung akustisch empfindlicher Leuchtgasflammen **48**, 109.

Schellenberg, K., Anwendung der Integralgleichungen auf die Theorie der Elektrolyse **47**, 81.

Schimank, H., Berichtigung zur Arbeit: „Über das Verhalten des elektrischen Widerstands“ usw. **46**, 176.

Schlichter, W., Die spontane Elektronenemission glühender Metalle und das glühelektrische Element **47**, 573.

Schrödinger, E., Notiz über den Kapillardruck in Gasblasen **46**, 413.

Schultze, H. †, Über das spezifische Gewicht des Argons **48**, 269.

Schultze, H. u. L. Holborn Über die Druckwage und die Isothermen von Luft, Argon und Helium zwischen 0 und 200° **47**, 1089.

Schweikert, G., Bestimmung der Schallgeschwindigkeit und des Verhältnisses der spezifischen Wärmes der Gase nach der Methode der K undt'schen Staubfiguren **48**, 593.

Sentleben, H., Über die Zahl der Emissionszentren der in Flammen leuchtenden Metalldämpfe und die Beziehungen dieser Zahl zur Helligkeit der ausgesandten Spektrallinien **47**, 949.

Siegbahn, M., Untersuchung über die Schwingungen von Telephonmembranen II. **46**, 298.

Siegl, K., Lochkameraaufnahmen mit Röntgenstrahlen **46**, 1151.

Smekal, A., Zur Thermodynamik kondensierter Systeme 47, 1139.

Smoluchowski, M. v., Zur Theorie der Zustandsgleichungen 48, 1098.

— Über Brownsche Molekularbewegung unter Einwirkung äußerer Kräfte und deren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Diffusionsgleichung 48, 1108.

Sommerfeld, A., Über das Spektrum der Röntgenstrahlung 46, 721.

Stark, J., Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. V. Feinzerlegung der Wasserstoffserie 48, 193. — Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. VI. Polarisierung und Verstärkung einer Serie 48, 210.

Starke, J. u. H. Lunelund, Polarisation der Lichtemission der Kanalstrahlen 46, 68.

Steinhausen, W., Untersuchung stehender Luftschwingungen (insbesondere in Flöte und Orgelpfeife) 48, 693.

Strieder, F., Über den Einfluß der Röntgenstrahlen auf die Kondensation des Wasserdampfes nach Versuchen von C. Leibfried u. O. Conrad 46, 987.

Strömberg, R., Einige Untersuchungen über eine günstige Gestalt des Wagebalkens 47, 989.

Strong W. W., Elektrische Fällung, Stokesches Gesetz und die Beisetzung von Teilchen aus Flüssigkeiten 48, 251.

T.

Tank, F., Über den Zusammenhang der dielektrischen Effektverluste

von Kondensatoren mit den Anomalien der Ladung und der Leistung 48, 307.

U.

Ungerer, A., Experimentelle Untersuchungen über Braunsche Zerstäubungsgitter 46, 130.

V.

Valentiner S. und J. Wallot, Über die Abhängigkeit des Ausdehnungskoeffizienten fester Körper von der Temperatur 46, 887.

Voigt, W., Bemerkungen zu einigen neueren Untersuchungen über Pyro- und Piezoelektrizität des Turmalins 46, 221. — Zur Theorie des longitudinalen Stoßes zylindrischer Stäbe 46, 657. — Zur Theorie des Zeeman-Effektes in gegen die Kraftlinien geneigten Richtungen 47, 245. — Über sekundäre Wirkungen bei piezoelektrischen Vorgängen, insbesondere im Falle der Drillung und Biegung eines Kreiszylinders 48, 433.

Voigt, W. und V. Freericksz, Theoretisches und Experimentelles zu der piezoelektrischen Erregung eines Kreiszylinders durch Drillung und Biegung 48, 145.

W.

Wagner, E., Spektraluntersuchungen an Röntgenstrahlen. I. 46, 868.

Wallot, J. u. S. Valentiner, Über die Abhängigkeit des Ausdehnungskoeffizienten fester Körper von der Temperatur 46, 887.

Warburg, E., Bekanntmachung über die Prüfung von Thermometern 48, 1034.

Warburg, E. und C. Müller, Über die Konstante c des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes 48, 410.

Washburn, G. E., Der Einfluß der Magnetisierung auf den Gleichstromwiderstand des Graphits nach der Hauptachse 48, 236.

Wehnelt, A., Über den Spannungsverlauf an Röntgenröhren 47, 1112.

Wien, W., Zur Theorie der Strahlung 46, 749. — Über wahre Absorption der Kanalstrahlen 48, 1089.

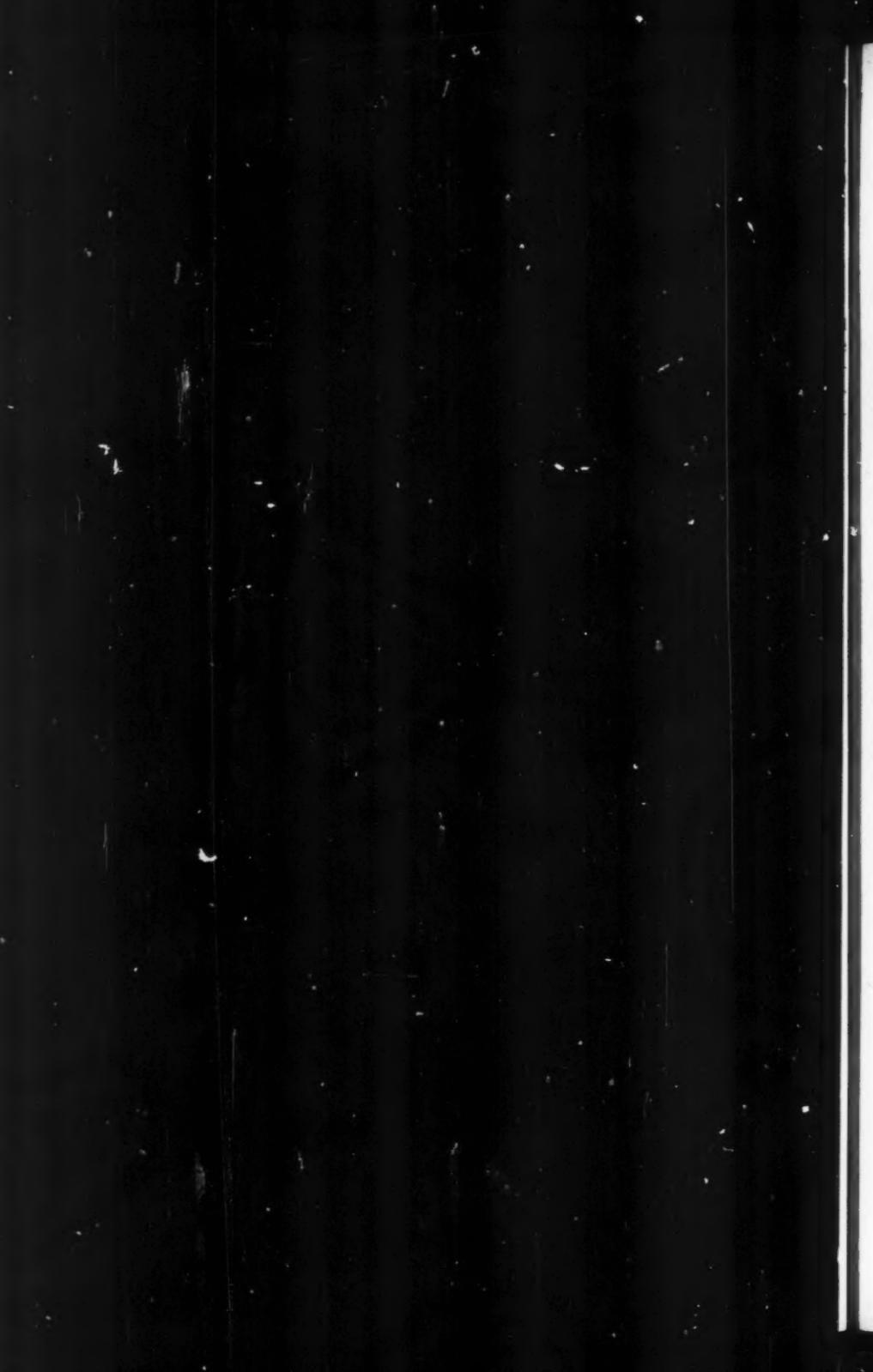
Wüstner, H., Über Diffusion und Absorption von Wasserstoff in Quarzglas 46, 1095.

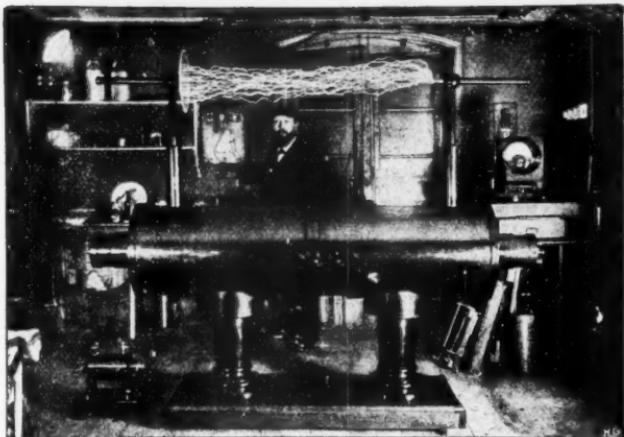
Z.

Zahn, H., Über adiabatischen und isothermen Halleffekt und die Messung des isothermen Halleffekts mit Wechselstrom 47, 49.

Zehnder, L., Eine gefahrlose metallische Röntgenröhre 46, 824.

nd
in
nd
die
all-
49.
al-





Induktormum 120 cm Funkenlänge, betägt mit unserm Collektor-Unterbrecher, Expositionsdauer 1 Sekunde. Links unten: Induktormum 10 cm Funkenlänge.

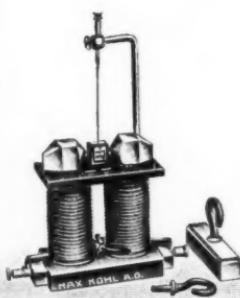
Unsere Induktormen eignen sich hervorragend zum Laden großer Kapazitäten, sowohl mit Wechselstrom ohne Unterbrecher, als mit unterbrochenem Gleichstrom.

Fr. Klingelfuss & Co., Basel.

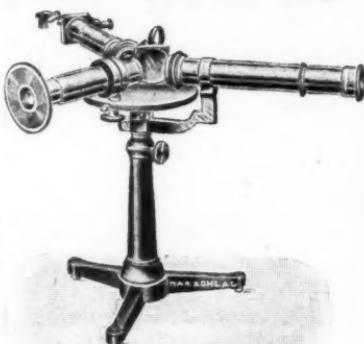
Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital M. 1600000

**Physikalische Apparate :: Funken-Induktoren
:: Projektions-Apparate in gediegener Ausführung ::**



62 280. Elektromagnet nach Weinhold
für para- u. diamagnetische Versuche.



54 097. Schulspektralapparat.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

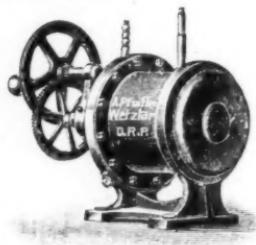
Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen
und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D. R. P.

System Gaede, D. R. P.
angemeldet

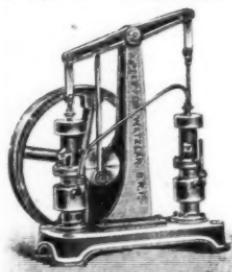


Hochvakuum-
Apparate
zur
Demonstration
und zu
wissenschaftlichen
Untersuchungen.

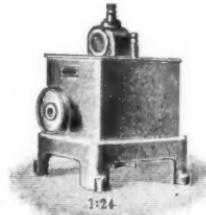
Neu-
konstruktionen
nach Angabe.



Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.
Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.



Alle Arten von
Luftpumpen:
Trockene rotierende
Luftpumpen,
Trockene Schieber-
luftpumpen,
Quecksilberluftpumpen
aller Systeme,
Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4-1000 m/m
Funkenlänge

Eingetragene
Fabrik-Marke

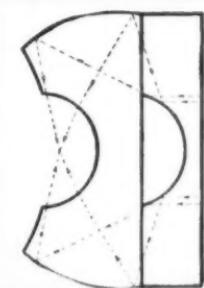


Induktoren
mit Demon-
strations-
schaltung.
Alle
Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

E. LEITZ, Optische Werke, WETZLAR

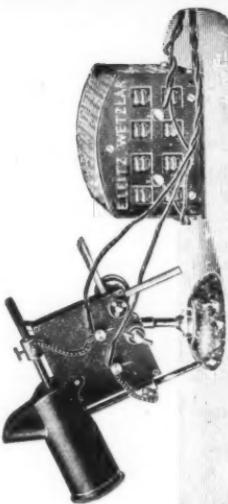
Berlin • Frankfurt a. M. • St. Petersburg • London • New-York



Ultra-Kondensor
zur Sichtbarmachung
ultra-mikroskopischer
Teilchen



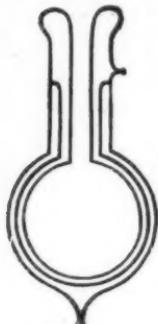
Ultra-Mikroskop



**Metallographische u. Mikrophotographische Einrichtungen
Physikalische Projektionsapparate für Hörsäle u. Schulen
Mikroskope, Luminiszenz-Mikroskope**

R. Burger & Co., Berlin N. 4.

Chausseestrasse 8.



Telephon: Amt III 171.

Teleg. Adr.:

Vakuumglas Berlin.

Goldene Medaille
1904 St. Louis

Ehren-Diplom
1906 Mailand

Spezialfabrik

für physikalische Glasapparate und Instrumente.

Vierwandige Glasgefäße nach Weinhold.

Preisliste gratis und franko.

Verlag von LEOPOLD VOSS in Leipzig

Lehrbuch der Metallographie

Chemie und Physik der Metalle und ihrer Legierungen

von

Gustav Tammann

Direktor des Instituts für physikalische Chemie in Göttingen

XVIII und 390 Seiten mit 205 Figuren im Text. 1914

Preis M. 19.—, gebunden M. 20.—

Beiblätter zu den Annalen der Physik: Gestützt auf die reiche Erfahrung, die der Verfasser in jahrzehntelanger Arbeit auf dem Gebiete der Metallographie zu sammeln vermochte, ist der bekannte Forscher darangegangen, seine Anschauungen über die Chemie und Physik der Metalle und ihrer Legierungen in dem nunmehr vorliegenden Lehrbuch niederzulegen. . . . Der Verf. hat die Metallographie im wesentlichen auf Grund seiner eigenen reichhaltigen Erfahrung und der in seinem Institute gemachten Arbeiten, nahezu 100, dargestellt. Das Buch wird besonders dem Physiker manche Anregung und Belehrung geben, aber auch für den Ingenieur werden die Ausführungen über die Eigenschaften und die eng damit verbundene Struktur der Metalle von Interesse sein. Für den Praktiker in der Fabrik dürfte es auch von ganz besonderer Bedeutung sein, in dem vorliegendem Buche eine kurze Theorie der Metallographie zu finden, die bisher in unserer Literatur fehlte.

Verlag von JOHANN AMBROSIUS BARTH in Leipzig

Die neuere Entwicklung unserer Universitäten und ihre Stellung im deutschen Geistesleben.

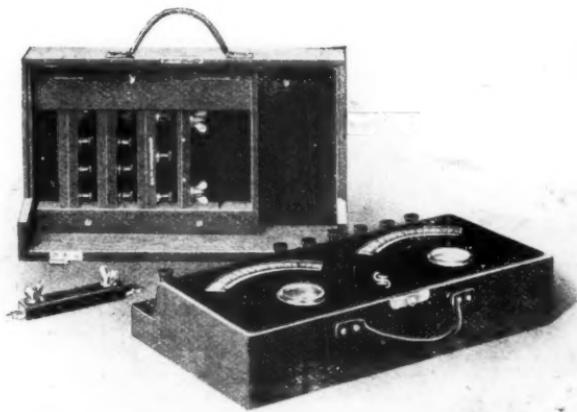
Von Dr. Wilhelm Wien,

K. B. Geh. Hofrat, o. ö. Prof. der Physik, Rektor der Univ. Würzburg.

Rede für den Festakt in der neuen Universität am 29. Juni 1914 zur Feier der hundertjährigen Zugehörigkeit Würzburgs zu Bayern. 40 S. 1915. M. 1.—.

Siemens & Halske A.-G.
Nernerwerk.
Siemenstadt bei Berlin.

**Kombinierte Präzisionsinstrumente
für Gleichstrom**



**Kombiniertes Präzisions-Volt-
und -Ampermeter für gleichzeitige
Messung von Strom und Spannung**

E. Leybold's Nachfolger Cöln

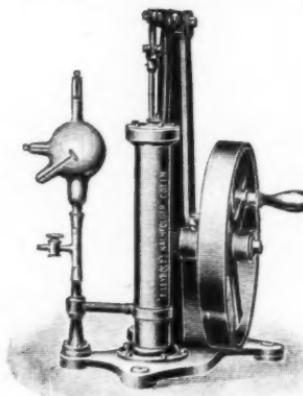
Neu!

Gaede-Kolbenpumpe

D. R. P.

(Vergl. Phys. Ztsch. XIV, S. 1238—1240)

Luftleere 0,00005 mm Hg



zeichnet sich durch **mechanische** und **physikalische Unverwüstlichkeit** aus. Infolge ihrer **steten Betriebsbereitschaft** und weitgehenden **Unempfindlichkeit** gegen **Wasserdämpfe** ist sie sowohl zur Vorführung einfacher Versuche wie für solche Demonstrationen geeignet, welche hohe Vakua erfordern.

Neu!

Gaede-Diffusionspumpe

D. R. P.

(Vergl. Annalen der Physik 46. 1915, S. 357—392.)

Alleinige Inseratenannahme durch: Geisdorf & Co., Berlin NW. 7.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

